

オペレーショナル・リスクの計測方法

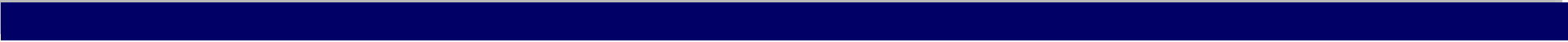
説明資料

2009年5月27日

AGENDA

1. オペレーショナル・リスク計量化の意義
2. オペレーショナル・リスク計量化の準備
3. オペレーショナル・リスク計量化の概要
4. パラメトリックな計量化の方法 (パラメトリック・アプローチ)
5. ノンパラメトリックな計量化の方法 (ノンパラメトリック・アプローチ)
6. まとめ

(参考文献)



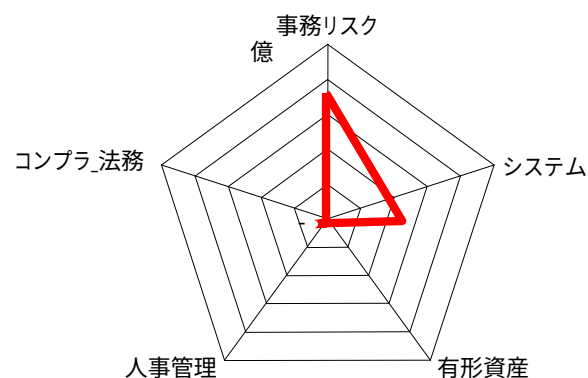
オペレーショナル・リスク計量化の意義

- オペレーショナル・リスク計量化の意味
- オペレーショナル・リスク計量化で取り扱う損失

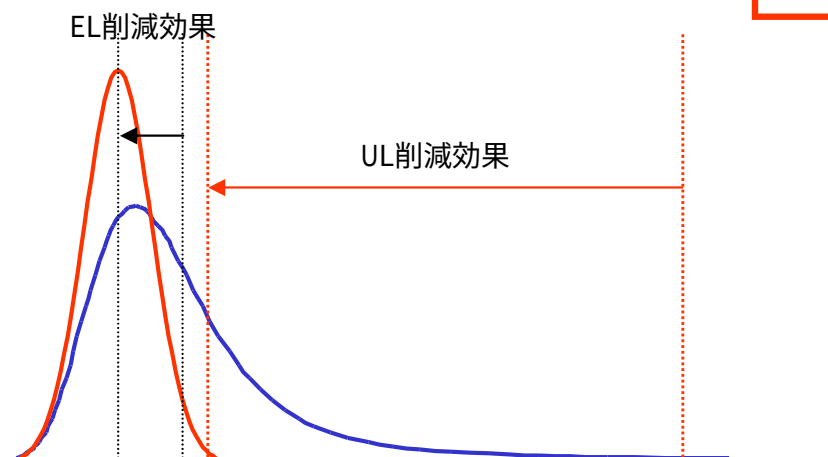
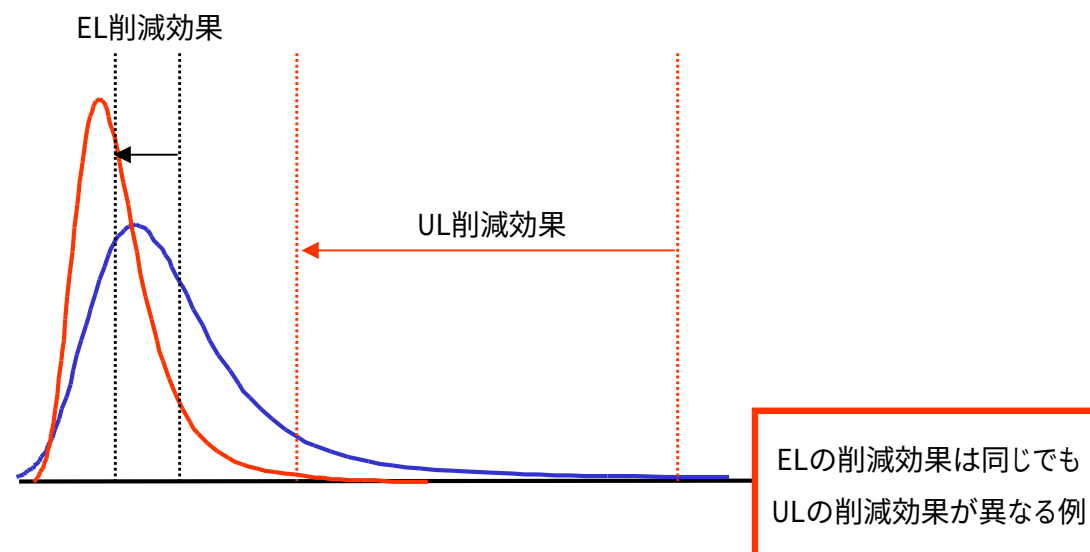
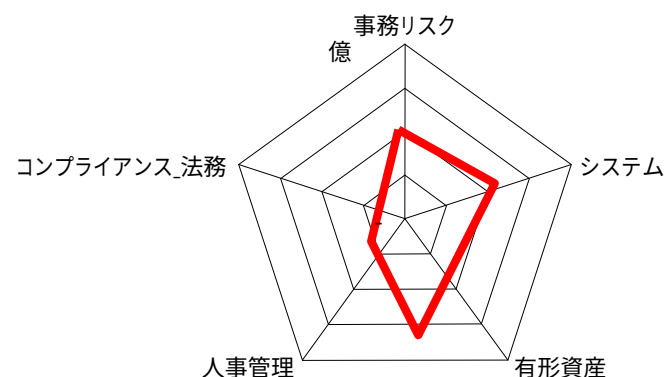
オペリスク計量化の意味

- オペリスクを計量化することは、様々なリスクを横並びで評価できるようになることに加え、対策に掛るコストとリスク削減効果を比較し、もっとも効率的なリスク管理を実現するための一助となります。
- また、リスクを数字(金額)で表現することにより、関係者の関心を高める効果も期待できます。

リスク毎:EL



リスク毎:UL



オペレーショナル・リスク計量化のメリット：先行金融機関の場合

経営上のメリット

資本配賦
(規制資本/経済資本の合理性)

- 適切なリスク量を見積もることができる。
→基礎的手法、標準的手法より規制資本が小さく出やすい。
(先行行では基礎的手法／標準的手法の6～8割程度)
- (投資家に) 自行の健全性・安全性を強くアピールできる。



リスク管理上のメリット

リスクの計量化

- リスク管理年度計画において、リスク削減目標の設定や結果評価がしやすいため取り組みへの強いインセンティブが働く。
- 損失発生構造をモデル化することで、有効なリスク削減策を選定できる。

個別リスクの定量的評価

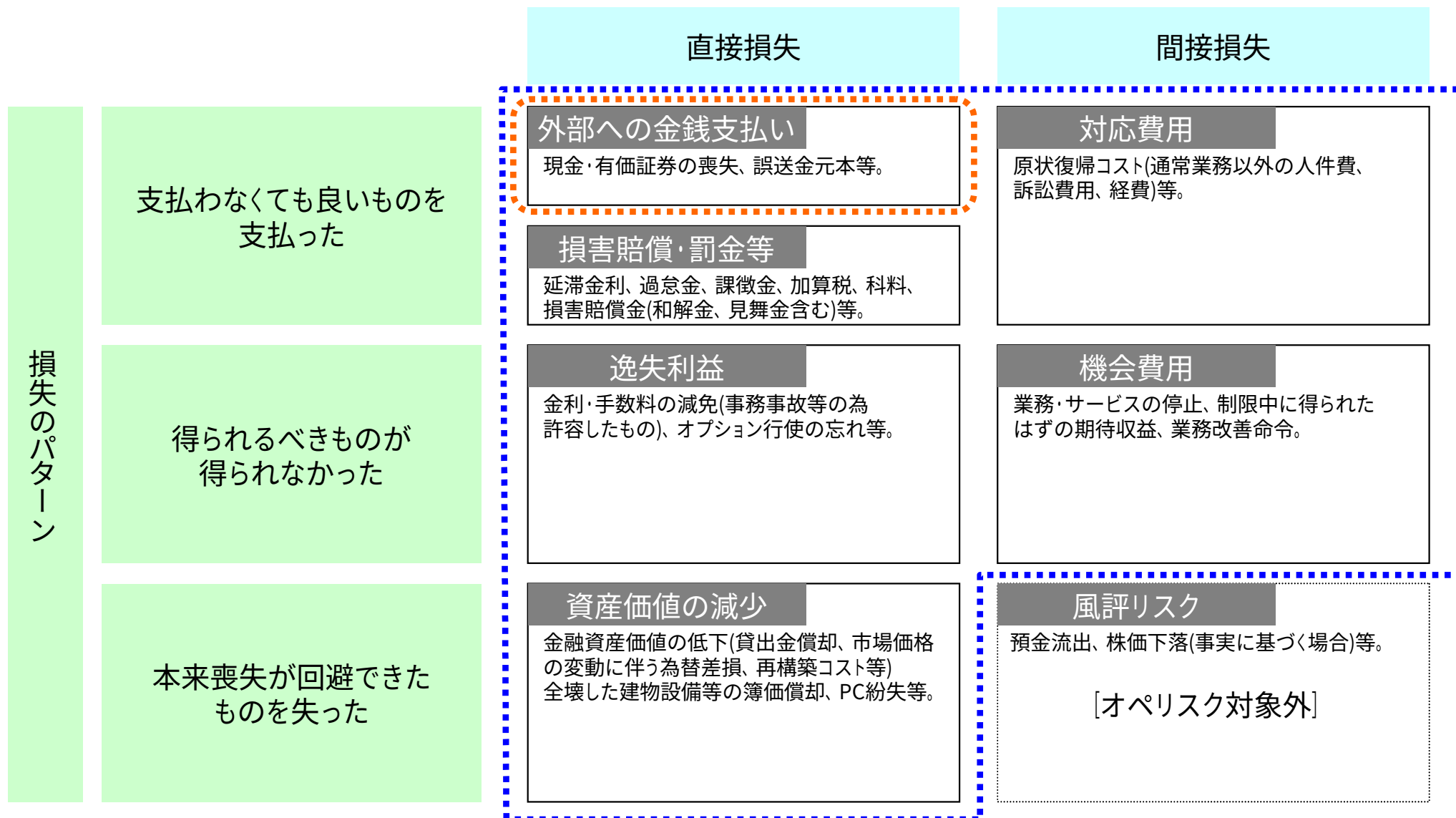
- 共通のものさし(損失金額)でリスクを評価できるため、個別リスク間の比較評価が客観的にできる。
- 潜在リスクを評価することで、顕在リスクと合わせた総合的・客観的評価ができる。

(参考) 損失事象とオペレーショナル・リスク

損失事象の種類	オペレーショナル・リスク損失	代表例
1. 内部不正	詐欺若しくは財産の横領又は規制、法令若しくは内規の回避を意図したような行為による損失であって、銀行又はその子会社等の役職員が最低一人は関与するもの（差別行為を除く）	(内部者による) 詐欺・横領
2. 外部からの不正	第三者による、詐欺、財産の横領又は脱法を意図したような行為による損失	(外部の者による) 詐欺・横領
3. 労務慣行及び職場の安全	雇用、健康若しくは安全に関する法令若しくは協定に違反した行為、個人傷害に対する支払い、労働災害又は差別行為による損失	不払い残業・過労死 セクハラ・パワハラ
4. 顧客、商品及び取引慣行	特定の顧客に対する過失による職務上の義務違反（受託者責任、適合性等）又は商品の性質若しくは設計から生じる損失	(リスク商品等での) 説明義務違反
5. 有形資産に対する損傷	自然災害その他の事象による有形資産の損傷による損失	地震、風水災、テロ
6. 事業活動の中断及びシステム障害	事業活動の中断又はシステム障害による損失	システム障害
7. 注文等の執行 送達及びプロセスの管理	取引相手や仕入れ先との関係から生じる損失又は取引処理若しくはプロセス管理の失敗による損失	事務ミス

出所) 佐藤隆文 (金融監督局長) 編著「バーゼルIIと銀行監督」(東洋経済新報社) に一部加筆

オペレーショナル・リスクとして扱う損失の範囲





オペレーショナル・リスク計量化の準備

○オペレーショナル・リスク計測の4要素とは

オペレーショナル・リスク計測の4要素

Source

Category

Loss Distribution

- 内部損失データ

内部損失
データ

Original Risk Type Category

Event-Type Category Lv 1

Actual Loss Data

Exposure-based
Discrete Distribution

- プレス
- インターネット
- 新聞DB

外部データ

リスク計測

- 外部データ
- ワークショップ
- 業務環境／内部統制
- エキスパート評価

シナリオ

Original Risk Type Category

Event-Type Category Lv 1

Estimated Worst Case Loss

Exposure-based
Discrete Distribution

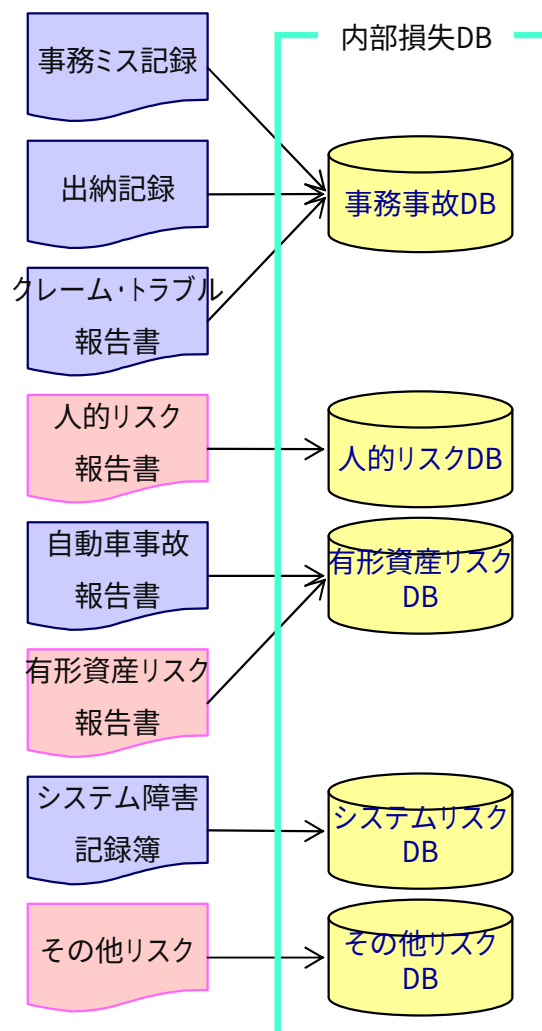
- プレス
- CSA
- シナリオワークショップ
- リスク管理部門

業務環境
内部統制

BEICF

内部損失データ

- 基本的には従来の損失報告（事務ミス報告書／システム障害記録簿等）がベースになります。
- 従来の管理項目は基本的に網羅します。
- リスク認識の視点を追加すると分析がし易くなります。



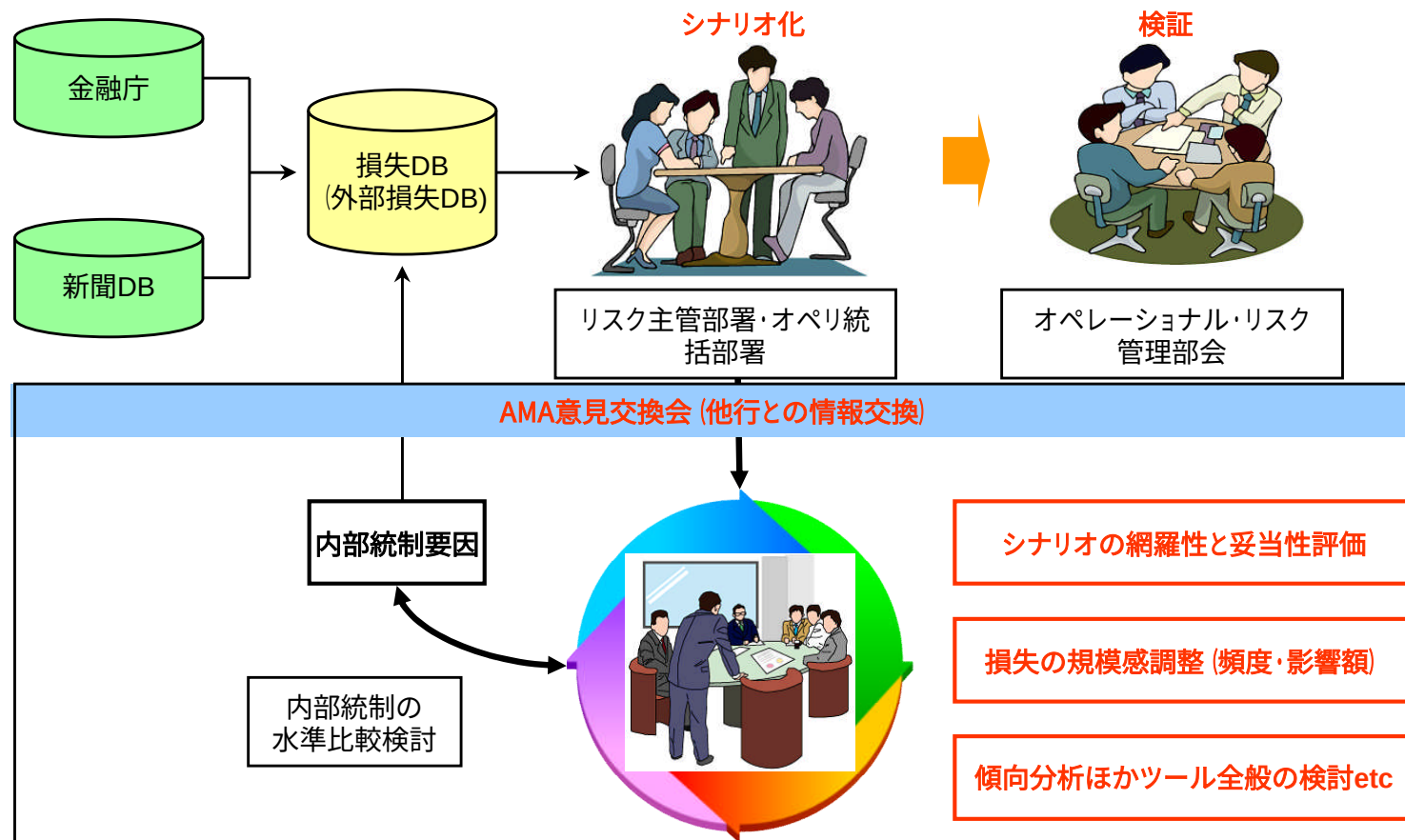
一般的なオペレーショナル・リスク損失DB項目

項目		備考		
発生場所	◎	発生関係		
発生日付	◎			
発覚日付	◎			
当初報告日付	◎			
損失名称	◎	BISレベル3+α	損失事象の分類	
損失事象分類	◎	BISレベル2		
損失結果分類		①外部への金銭支払②資産価値の減少③期待収益の損失		
直接損失額(グロス金額)		損失の額		
損失額				1円以上
損失見込額	◎			
間接損失内容・金額		間接損失の内容/人件費/その他経費 → 百万円以上の場合		
保険による回収額		回収の額		
保険の名称(種類)				
保険以外による回収金額				
保険以外による回収内容				
今後の回収見込み有無	◎			
損失の説明		損失事象の発生要因		
発生原因				重大な損失の場合記述
発生経過				
事後措置等				
再発防止策(アクション・プラン)		簡潔に記述		
ビジネスライン	◎	業務区分		
金融庁等当局宛届出・報告有無				
信用リスク・市場リスクとの重複有無		部室・支店・支社等は報告不要		

◎:入力必須項目

パラメータ推計と検証方法 シナリオ編

- シナリオについては、行内におけるパラメータの妥当性検証（リスク主管部署／オペリスク統括部署）を検証した上で、オペレーショナル・リスク管理部会で他の目線から検証を行っている。
- また、他行との情報交換によって、第三者的な妥当性検証を行っている。



(参考) 地震リスク

有形資産リスクの内、相当程度の規模が予想される地震リスクについては、a)マクロデータを用いて拠点毎の地震動リスクを評価し、b)拠点毎の建築年等の状況やc)資産状況と合わせて、具体的な損失の想定を行う。

貴行の拠点別情報

1. 基本情報 (拠点別)

- ☐ 拠点名 (xx支店、xxセンター等)
- ☐ 住所 (+緯度/経度)
- ☐ (店番)
- ☐ (自営、賃貸)

2. 建築構造 (拠点別)

- ☐ 建築日
- ☐ 構造 (木造、非木造等)
- ☐ 補強工事の有無

3. 資産価値 (拠点別)

- ☐ 店舗再建築価格
 - ☐ 営業店端末台数/再調達価格
 - ☐ 両替機設置台数/再調達価格
 - ☐ 出納機設置台数/再調達価格
- 拠点が全壊したときの影響度

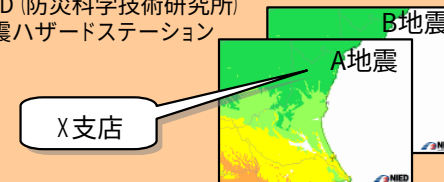
4. 想定地震毎の全壊確率 (拠点別)

- ☐ A地震→20%
- ☐ B地震→5%
- ☐ ...

地震に関して公開されている情報

想定地震毎の地震動予測地図

NIED (防災科学技術研究所)
地震ハザードステーション



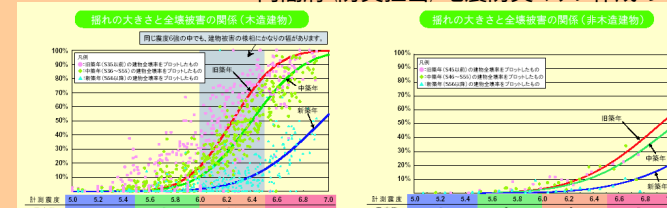
X支店の基本情報

X支店の建築構造

X支店の想定
地震毎の地表
最大速度

震度と全壊被害確率

内閣府 (防災担当) 地震防災マップ作成のすすめ



X支店の想定地震
毎の全壊確率

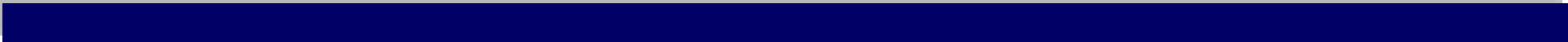
想定地震毎の発生確率

NIED (防災科学技術研究所)
地震ハザードステーション

断層/海溝型	30年発生確率	50年発生確率
A地震	4~7%	6~10%
B地震	75%	90%
...		

有形資産リスク (地震) の計量化に必要な情報

- ☐ 想定地震毎の地震発生確率
- ☐ 想定地震毎の全壊確率 (拠点別)
- ☐ 資産価値 (拠点別)



オペレーショナル・リスク計量化の概要

- オペレーショナル・リスク計量化の方法 ー損失分布手法とはー
- 論点1:計測単位
- 論点2:パラメトリック・アプローチとノンパラメトリックアプローチ
- 論点3:アグリゲーション

影響度分布手法の概要

1年間で何回起こるのか？

発生頻度分布

[計測単位 (グラニュラリティ)]

業務単位

システム単位

損失事象 (Lv3~4)単位

損失事象が起こった時の損失額はいくらなのか？

影響度分布

外部への金銭支払い

損害賠償・罰金等

逸失利益

資産価値の減少

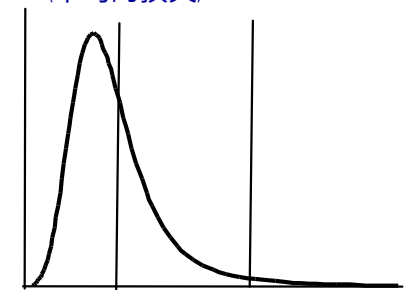
対応費用

損失発生件数

損失額の分布

(シミュレーションの結果)

EL (平均的損失) UL (最大損失)



EL: Expected Loss

UL: Unexpected Loss

損失発生金額

損失発生金額

損失発生金額

損失発生金額

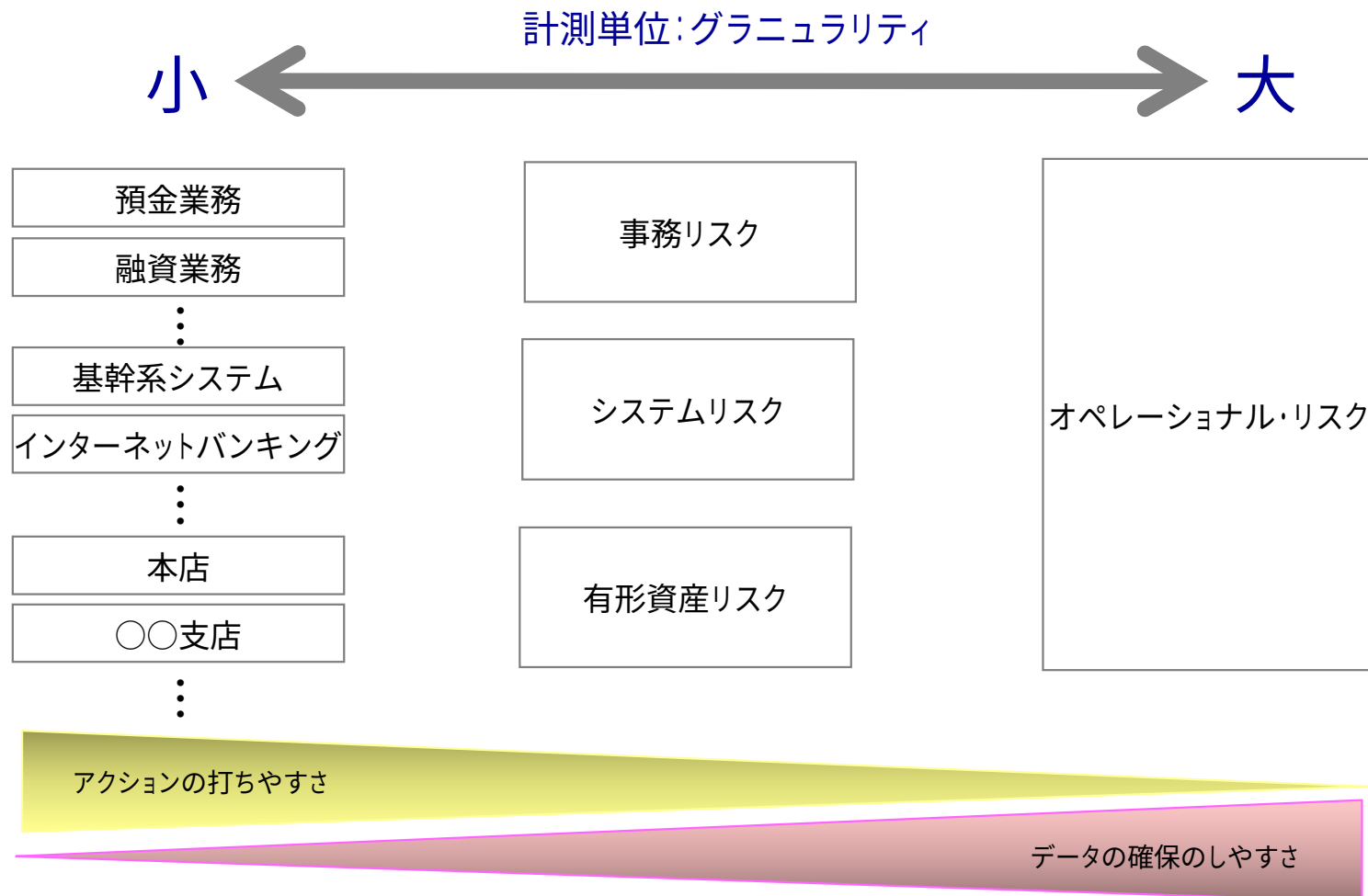
損失発生金額

損失額

- 内部損失データやシナリオに基づいて、年間の発生頻度、発生した場合の影響度の組合せをシミュレーションします。
- シミュレーションの結果、平均的な年間損失額や最大損失額を見積もります。
- つまり、年間の発生頻度や影響度のバリエーション (分布) を正しく知ることが、計量化の精度を上げることになります。

計測単位：グラニュラリティ

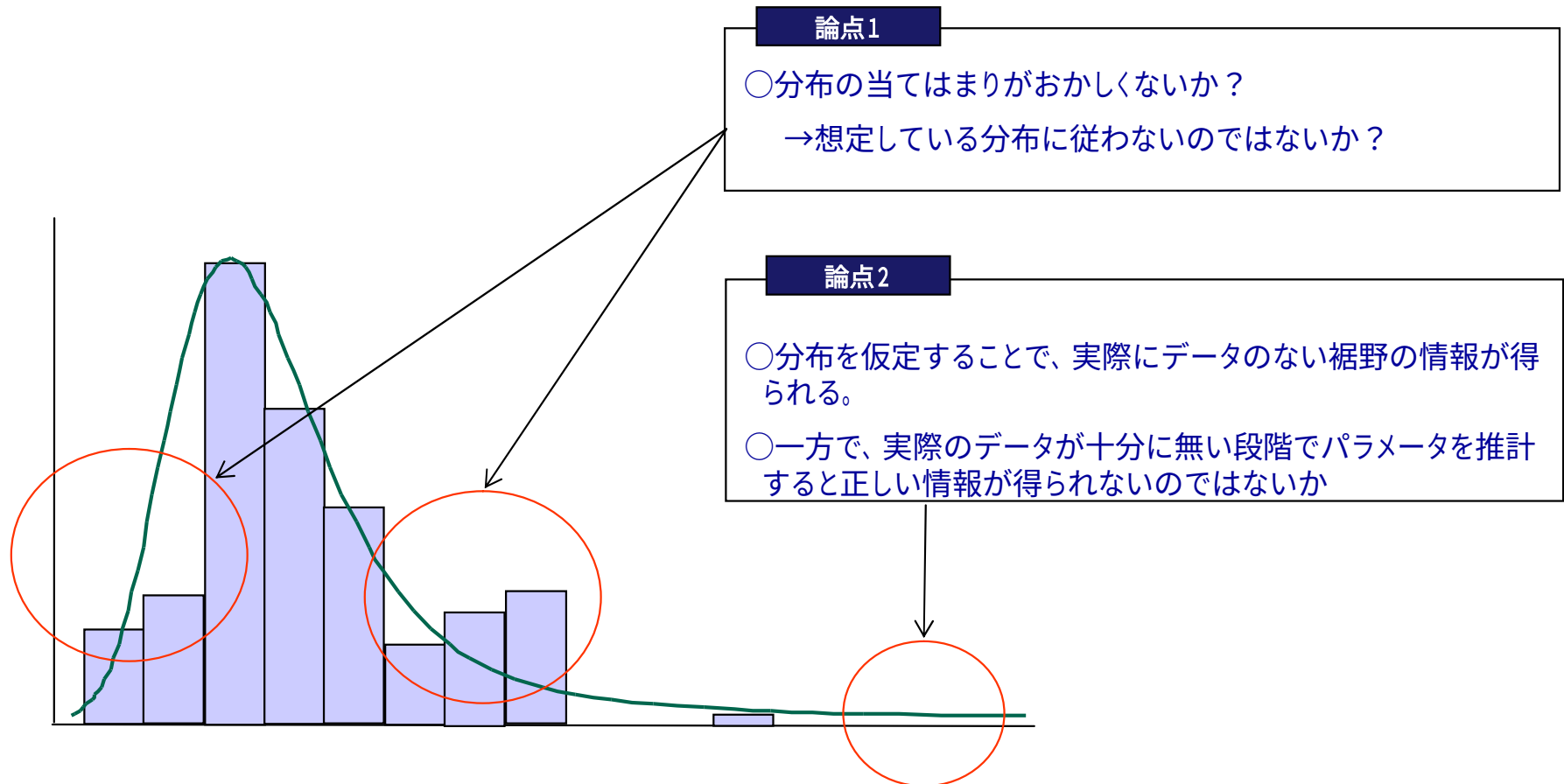
- 計量化をどの単位で行うかは大きな課題。グラニュラリティが大きければ影響度分布は様々な分布の複合となることが予想される。
- 一方で、グラニュラリティを細かくすればひとつひとつの計量化ユニットが小さくなりすぎ、データの確保が難しくなるとともに精度が落ちる。



※データは確保できるが分布形状が複雑化する懸念

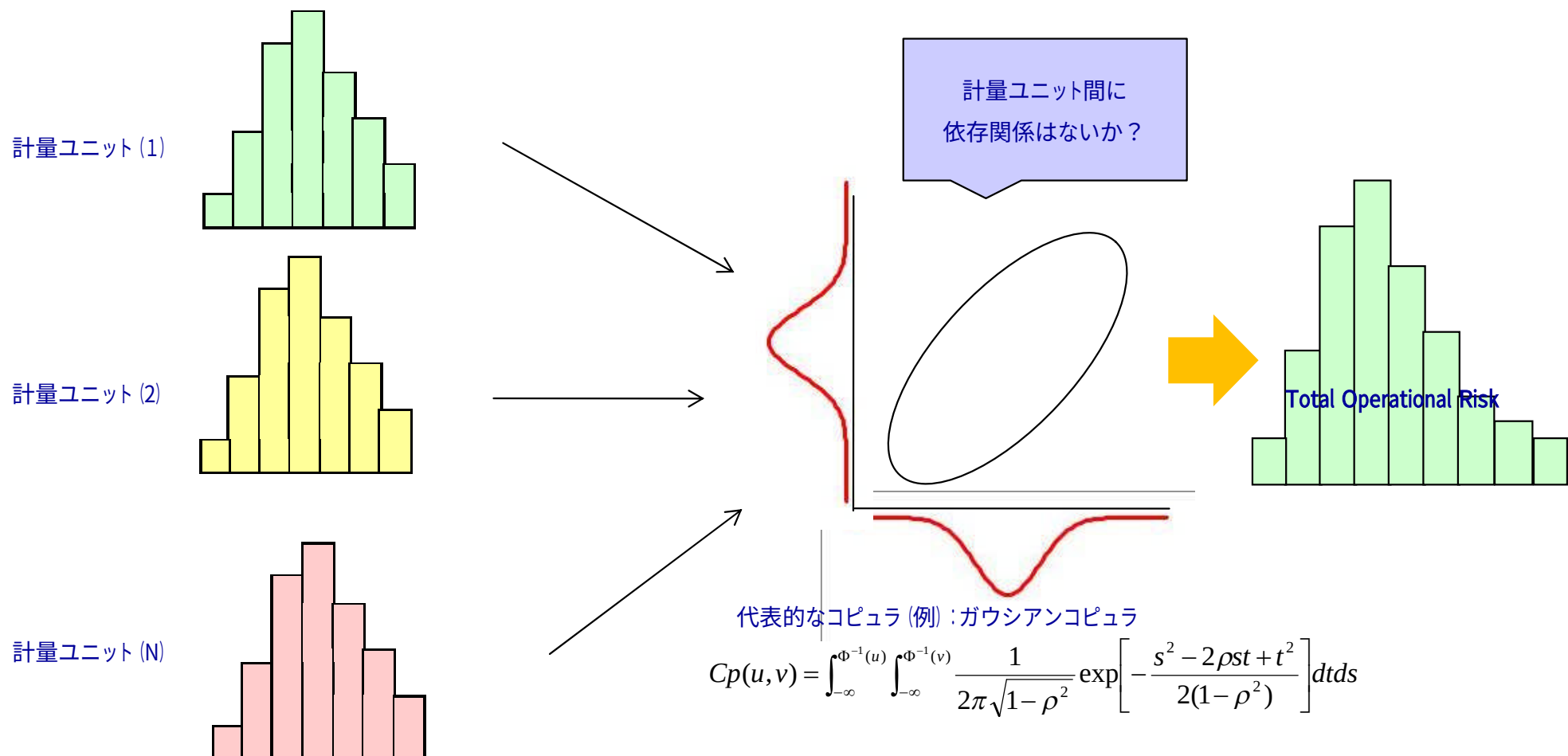
パラメトリック・アプローチとノンパラメトリック・アプローチ

- オペレーショナル・リスク計測上のポイントは、取得されたデータから「発生頻度」や「影響度」の“**真の影響度分布**”（バリエーションや範囲）を想定するところにある。
- 特に、（影響度の）分布の裾野に係る情報は計量結果へのインパクトが大きく、損失を正確に把握するために重要な要素となる。
- このため、データに何らかの分布を当てはめる「パラメトリック・アプローチ」と分布を仮定しない「ノンパラメトリック・アプローチ」が存在する。「パラメトリック・アプローチ」は既存の情報から未知の大きな損失を推計しようという立場であり、「ノンパラメトリック・アプローチ」はいたずらに推計するのではなく、既に起こったことこそ正しいという立場と言うこともできる。



計量結果の合成方法: アグリゲーション (相関の考慮)

- 計量ユニット単位で計量化された結果をまとめるに当たって、相互の計量結果に関連性がないかを確認する。
- 必要があれば、**コピュラ**により計量ユニット間相互の依存関係を考慮する必要がある。
- コピュラとは、多変量同時分布を各変数の周辺分布と相互依存関係に分けて表現するときに、相互の依存関係を示す関数である。



パラメトリックな計量化の方法 ー影響度として特定の分布を仮定する方法ー

- 発生頻度の分布
- 影響度の分布 (古典的パラメトリック分布／一般化パラメトリック分布／極値理論 (EVT-POT))
- パラメータ推計の方法
- 当てはまりの評価

発生頻度分布

ベルヌーイ確率変数の和の分布

→ n回の試行のうちk回成功する確率

二項分布

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

(復元抽出)

二項分布の極限分布としてのポアソン分布

$np = \lambda$ (一定) $n \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$ となるような極限分布

$$p(x) = p(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

ポアソン分布

$Np = \lambda$ を確率変数と考え
これがガンマ分布する場合

ベルヌーイ試行において、最初の成功までの試行回数の分布

超幾何分布

超幾何分布の一般化

負の二項分布

(非復元抽出)

$$p(n, m, r) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{n}{r}}$$

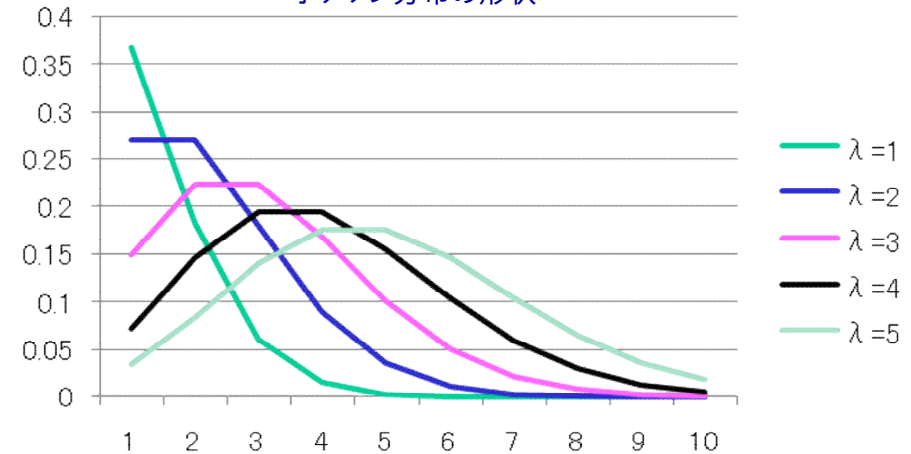
ベルヌーイ試行において、r回成功するまでの試行回数の分布

$$p(x) = \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!} p^r q^x$$

ポアソン分布と負の二項分布の形状

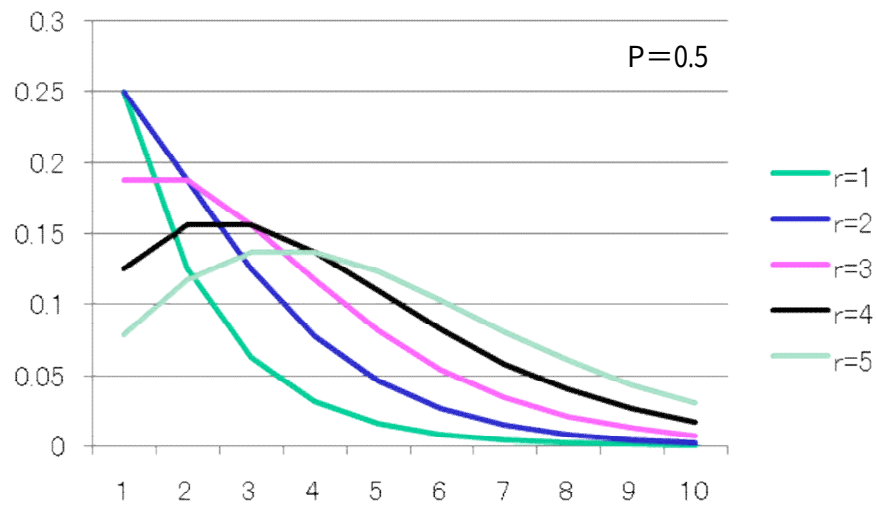
$$p(x) = p(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

ポアソン分布の形状

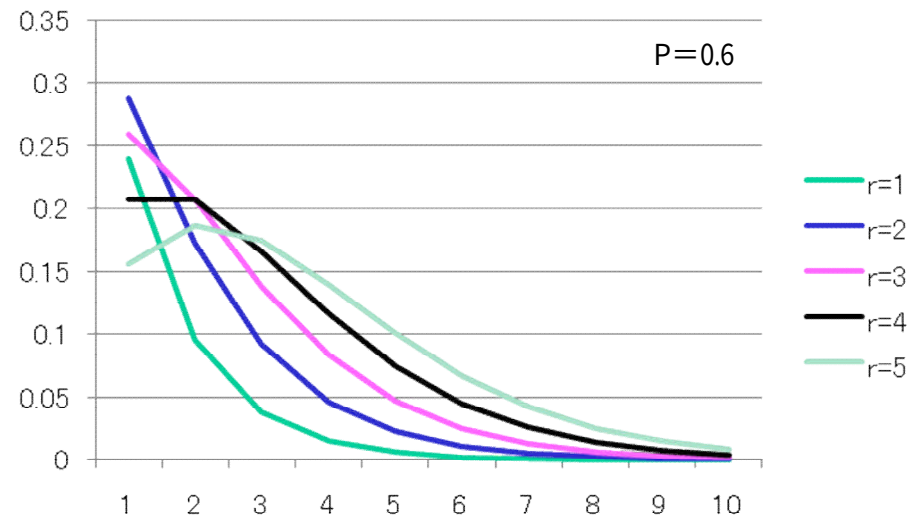


$$p(x) = \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!} p^r q^x$$

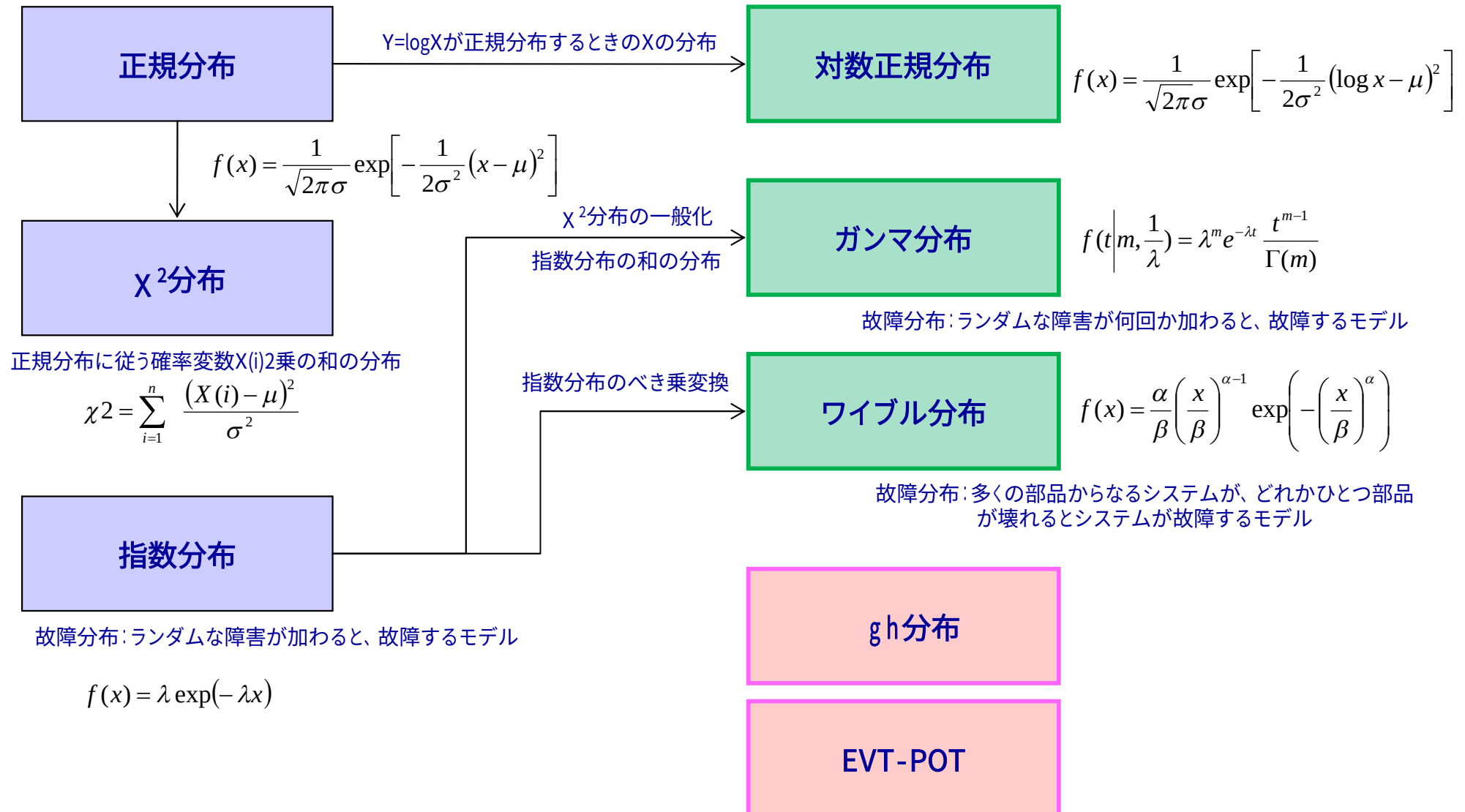
負の二項分布の形状



負の二項分布の形状



影響度分布



正規分布/対数正規分布

正規分布

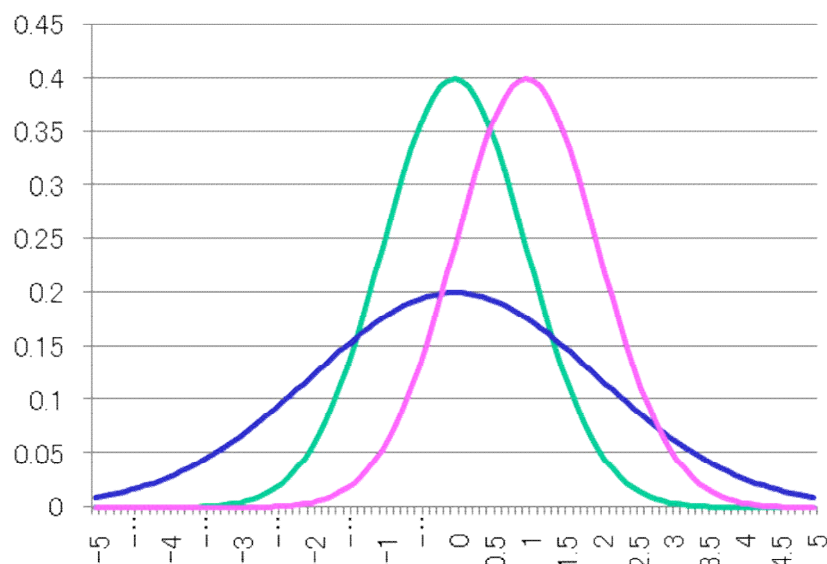
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

Y=logXが正規分布するときの
Xの分布

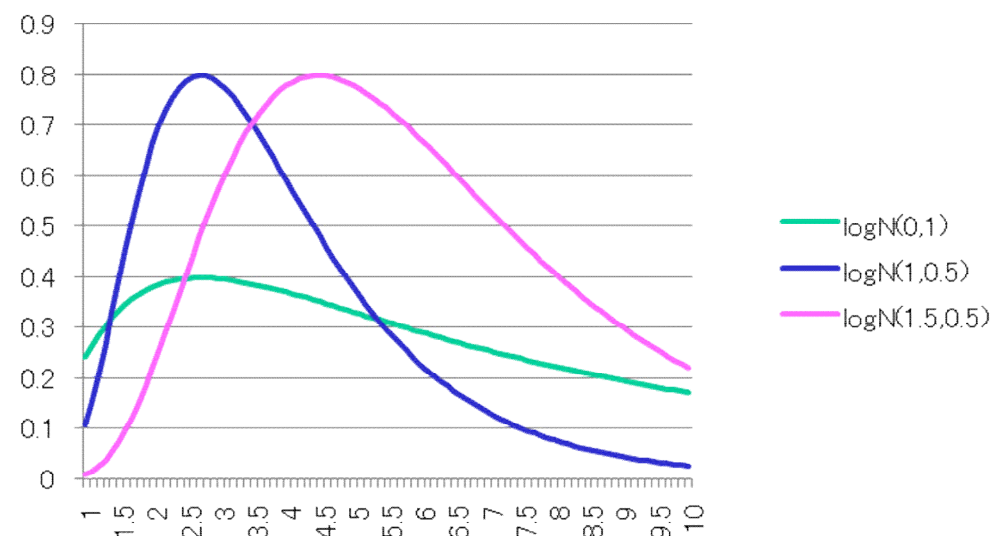
対数正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right]$$

正規分布の形状

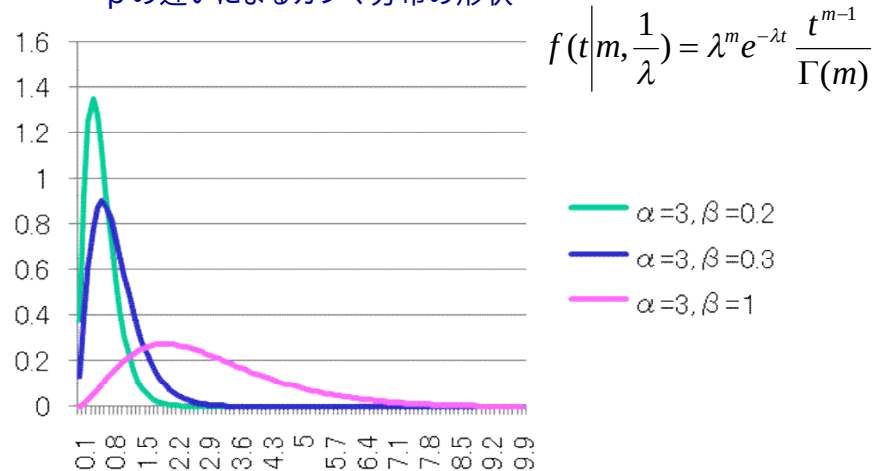


対数正規分布の形状

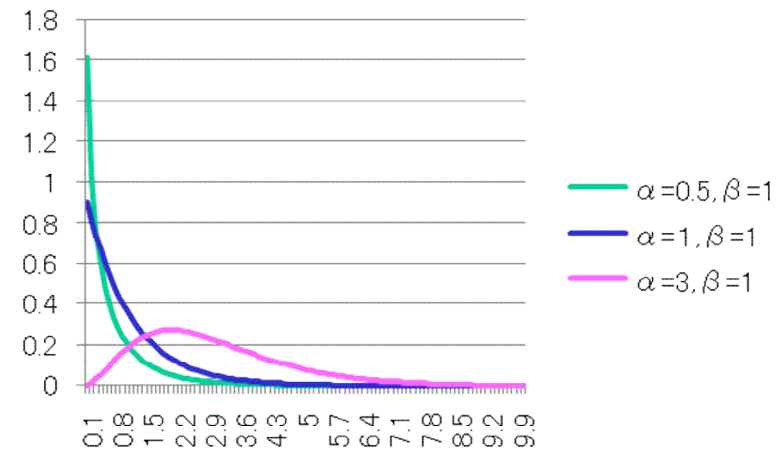


ガンマ分布/ワイブル分布

βの違いによるガンマ分布の形状

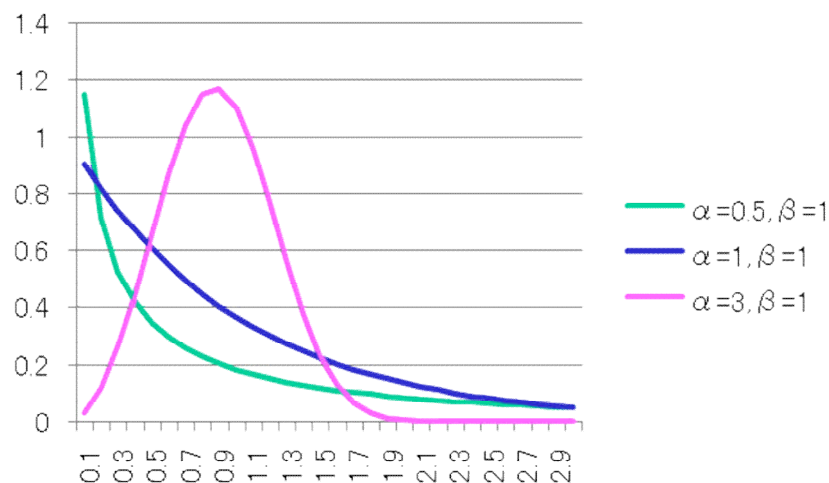


αの違いによるガンマ分布の形状



$$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$$

αの違いによるワイブル分布の形状



■ワイブル分布のパラメータαは一般に形状パラメータといい

α=1 指数分布

αが小さいほど非対称性の強い分布形状

α>3~4で正規分布に代用されるような形状

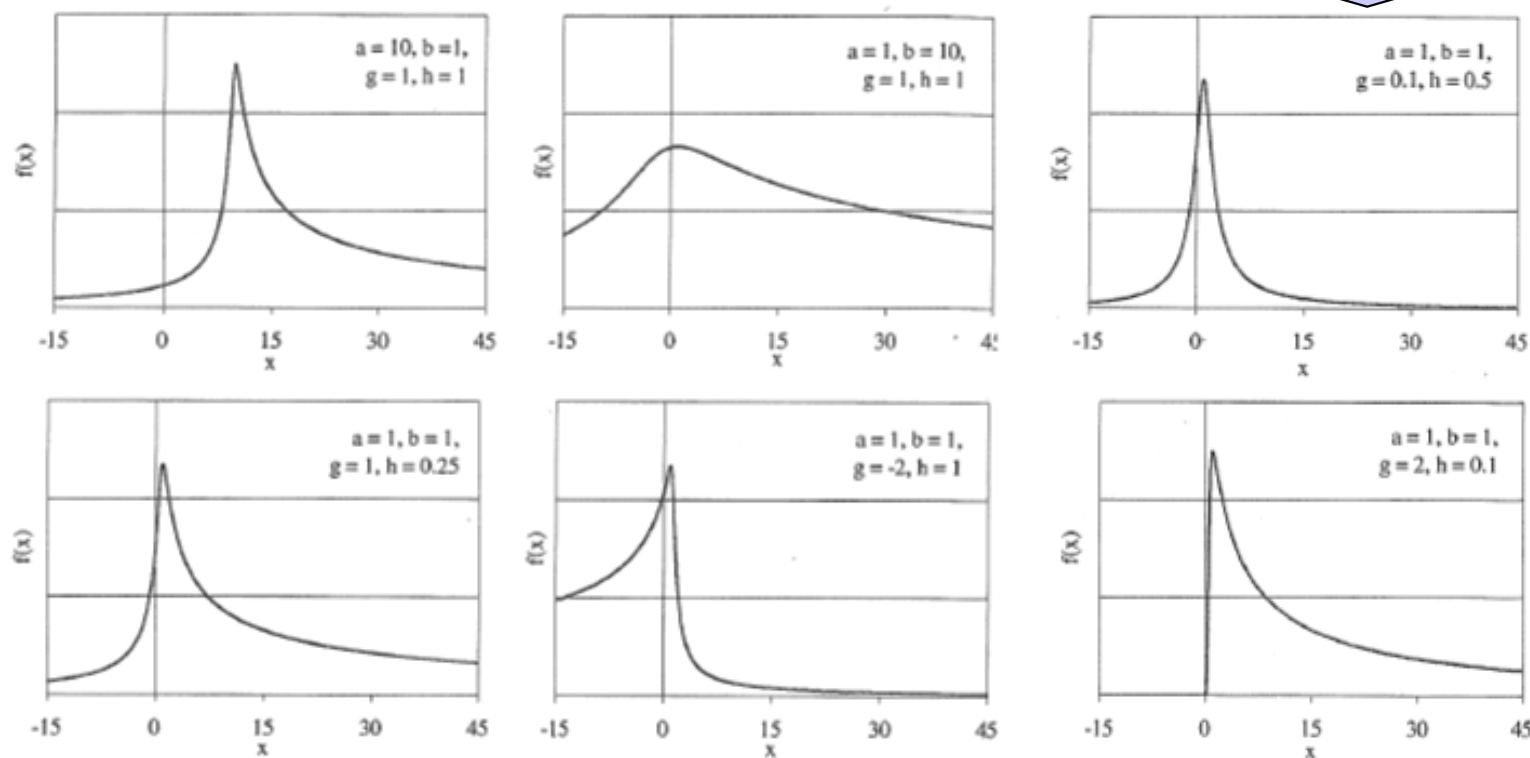
→ガンマ分布よりもデータへの当てはまりがよい傾向がある。

パラメータの多い分布 g-h分布

- g-h分布は以下の式で表現され、A、B、g、hの4つのパラメータを持っている

$$X_{g,h}(Z) = A + B(e^{gZ} - 1) \frac{\exp(hZ^2 / 2)}{g}$$

尖度と歪度の自由度が大きい！



出所) Kabir Dutta and Jason Perry “A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital”
Federal Reserve Bank of Boston Working Paper (2007)

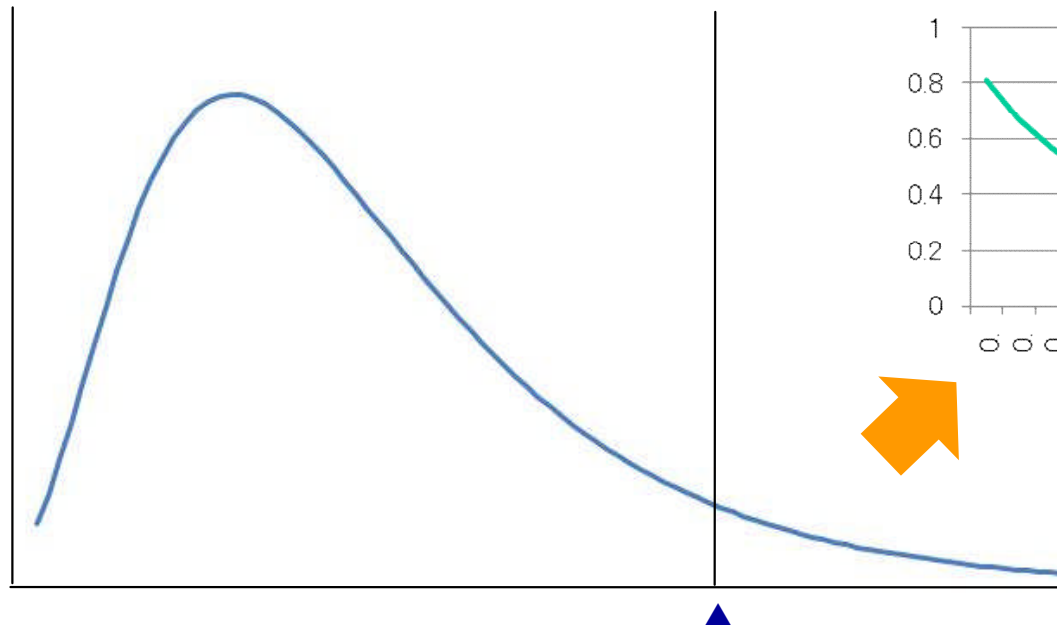
EVT-POT — Extreme Value Theory – Peak over threshold -

- オペレーショナル・リスクにおける損失の場合、分布の裾野に注目点がある。
- 分布を当てはめると、分布の中心 (Body) への当てはまりが良いことが一般的で、注目すべき裾野 (Tail) での当てはまりを評価することは少ない。

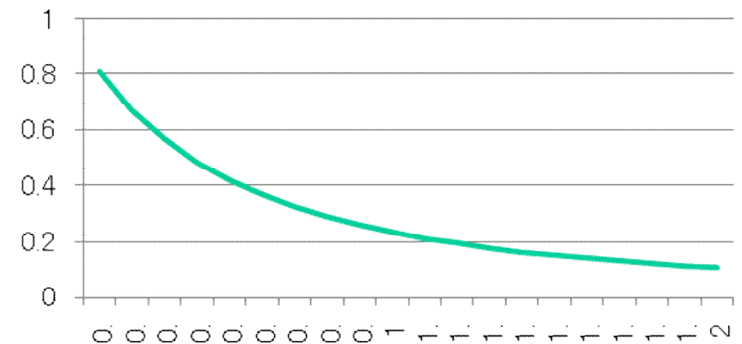


分布の裾野に注目し、その部分にスポットを当てて推計を行う！

オペレーショナル・リスクの影響度分布



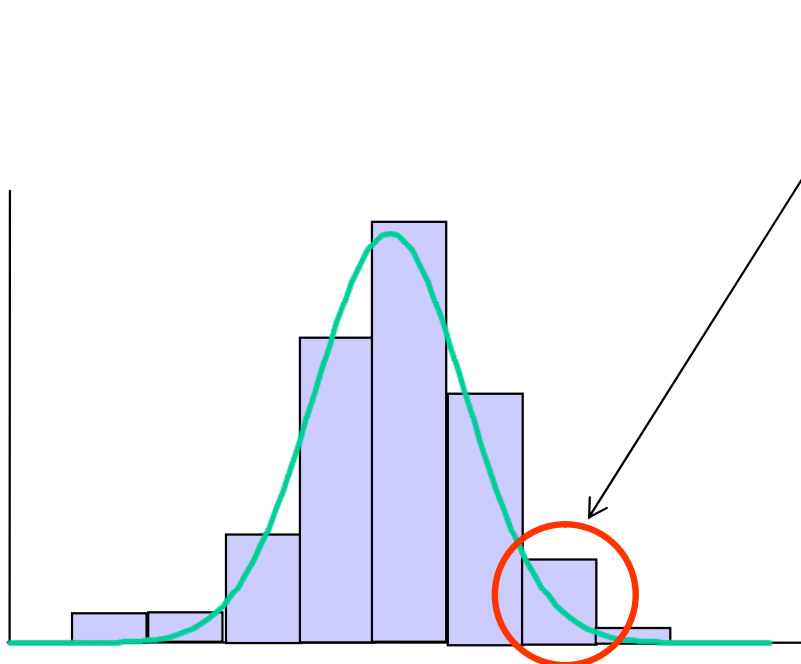
分布の裾野に一般化パレート分布 (GPD) を当てはめる



$$G(x; \xi, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & (\xi \neq 0) \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & (\xi = 0) \end{cases}$$

パラメータの推計方法 ー最尤法ー

- 分布のパラメータの推計方法にはいくつかの方法がある。ここでは、最も一般的な「最尤法」の説明をする。



仮にこの部分の当てはまりを評価する場合

1) 想定した分布の確率 (密度) : $p(i)$

2) 実際の発生頻度 = このクラスの発生件数 / 総件数 : $q(i)$

とすると、1) 2) のそれぞれの比率 (確率) が一致していると当てはまりが良いことになる。

$$\frac{p(i)}{q(i)} \rightarrow 1$$

$$\log \frac{p(i)}{q(i)} \rightarrow 0 \quad (\text{対数をとって})$$

となる。



分布全体に拡張

それぞれのクラスの重みは、想定した分布の確率 (密度) になるので $p(i)$ となる
したがって、

$$\sum_{i=1}^n p(i) \log \frac{p(i)}{q(i)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n p(i) \log p(i)}_{\text{①項}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n p(i) \log q(i)}_{\text{②項}}$$

①項

②項

右辺第①項は分布 $p(i)$ にのみ依存した定数になる。したがって、第②項が大きいほど式は0に近づき、当てはまりが良いことになる。

第②項 (対数尤度) が大きいほど当てはまりが良いといえる。

この第②項を最大にするように分布のパラメータを推計する方法を最尤法という。

最尤法とは

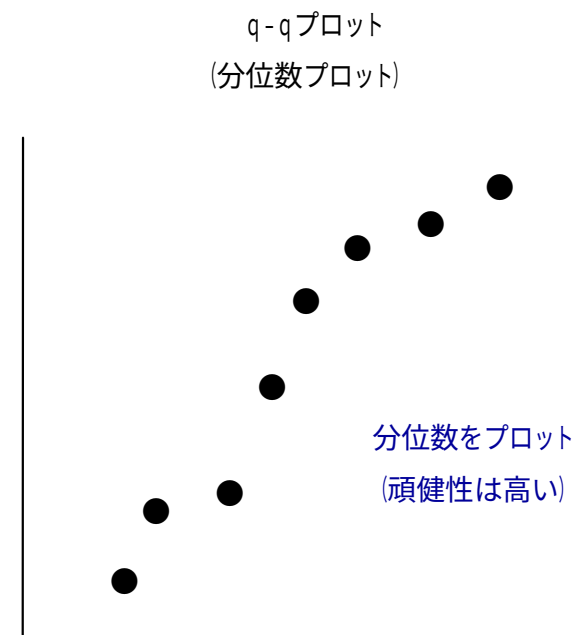
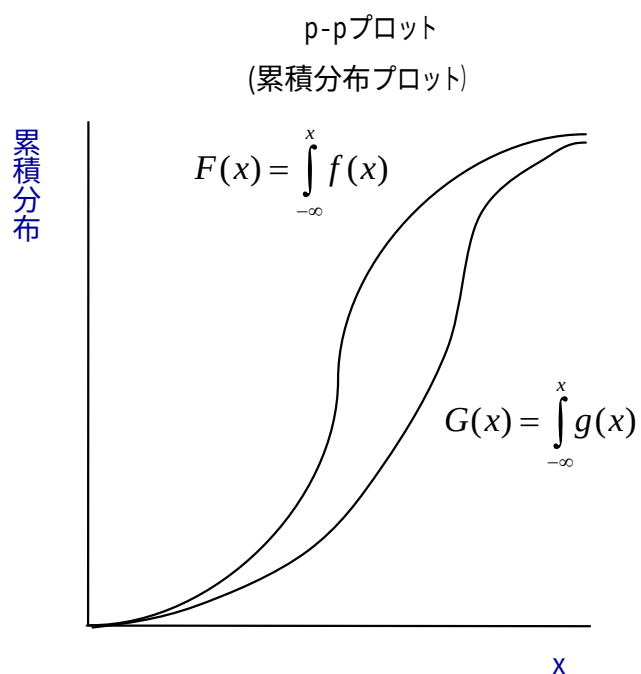
実際に起こったデータにもとづいて、分布のパラメータを調節することで、分布の当てはまりが最も良くなる (第②項 = **対数尤度を最大化する**) パラメータを選択する方法をいう。

(参考) パラメータ推計手法の特徴

パラメータ推計手法	特徴
最小 2 乗法	実際の数値 (損失額合計に対する当該損失額の比率) と予想される確率分布値との差の 2 乗平均が最小になるようパラメータを求める方法。 $\sum_{n=1}^N \{y_n - f(x_n)\}^2 \rightarrow \text{最小化}$ 裾の部分は、理論上も実際上も確率 1 にほぼ接近しているため、計算結果への影響度が低い。したがって、分布全体の形状へのあてはまりがよくても、裾部分の影響については大きなずれが生じうる。
最尤法	各実測値を分布関数にあてはめた場合にその積が最大になるようパラメータを求める方法。 $\prod_{n=1}^N f(x_n) \rightarrow \text{最大化}$ 分布関数によって違いはあるものの、一般に実際の数値の 1 乗あるいは、それ未満の値を使ってパラメータが求められることになることが多いようであり、このため、裾部分の取扱は、本体部分の数値と同等程度であるから、裾部分の影響の評価が大きくはない。
モーメント法	分布に対するモーメント関数を求め、パラメータを求める方法。関数によって違いはあるものの、一般に実際の数値の 2 乗を使うため、裾部分の取扱が本体部分より大きくなるため、裾部分の影響の評価が大きい。
クォンタイル推定	Q-Q プロットのように、理論値と特定のパラメータ推定値とを設定した場合のプロットの当てはまり具合を目で確認する。上位の分位点で理論値と推定値が一致するようにすることで、裾部分の影響を精度よく評価できる。

分布の特定

- いくつかの分布から、データと比べて、最も当てはまりの良い分布を選択するのが、一般的な方法である。
- このため、比べる分布がいくつかある場合は、「対数尤度が最大」で評価することが多い。
- しかし、オペリの場合は分布の中心よりも分布の裾野が大事な場合もある。この場合は、確率プロット (p-pプロット、q-qプロット) を用いる事もある。



(参考) パラメトリック分布の当てはめ評価方法

検定方法	特徴
χ ² 乗検定	分布関数0から1の範囲を複数の区分に分け、各クラスにおける実測値の数と分布から推定される数の差の2乗を推定値で割ったものの合計につきχ²乗法により有意性を検討するもの。 $\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{\{n_k - E(n_k)\}^2}{E(n_k)}$ n_k: 実測値の数 E(n_k): 分布から推定される数 どのように範囲区分するかについて恣意性がある。 また基本的に裾の部分の実測数は少ないため、裾の部分を多くのクラスに分類することが困難なため、結果的には、データの多い部分の影響を受けやすい。
コルモゴロフ-スミルノフ検定 (KS検定)	実際の数値に基づく累積確率値と理論上の累積分布値の差の最大値を利用し当てはまり具合を検討する方法。 H_n(x)は実際の数値に基づく累積確率値。H(x)は理論上の累積分布値 $KS = \sqrt{n} \sup H_n(x) - H(x) $ 差の最大値は本体部分で生じやすいことから、裾部分の影響は少ない。
アンダーソン-ダーリング検定 (AD検定)	次の関数を利用し、あてはめ具合を検討するもの。 $A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{H_n(x) - H(x)\}^2}{H(x)\{1 - H(x)\}} dH(x)$ 分母において両裾が同等に扱われている分、上側の裾の影響は少ない。なお、同様の関数で、分母を $\{1 - H(x)\}^2$ で割る手法A-Dupもあり、このほうが上側の裾の影響を評価できる。
Q-Qプロット	Q-Qプロットのように、理論値と特定のパラメータ推定値とを設定した場合のプロットの当てはまり具合を目で確認する。上位の分位点で理論値と推定値が一致するようにすることで、裾部分の影響を精度よく評価できる。

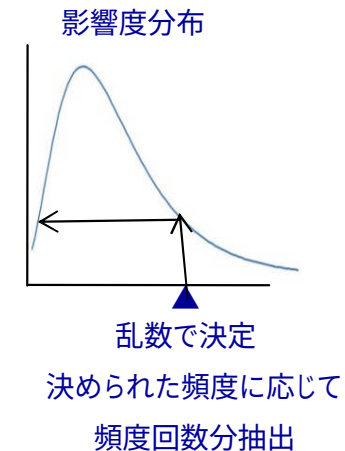
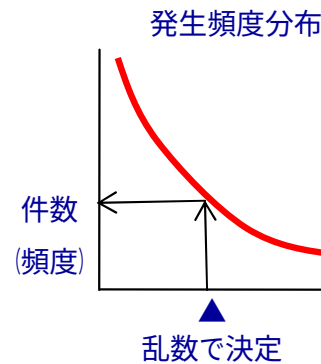
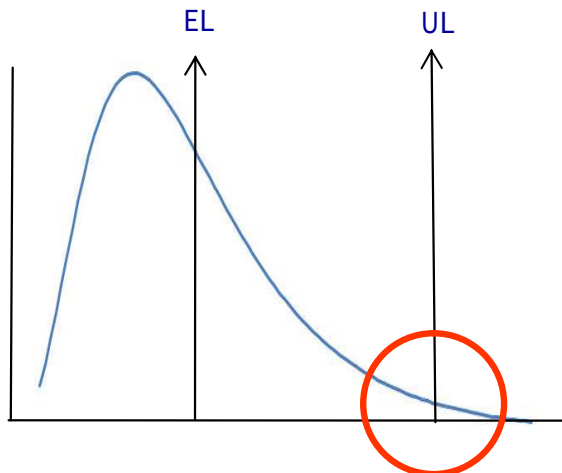
VaRの計測

■ 発生頻度分布と影響度分布の推計 (想定) ができたら、シミュレーションによりVaRを推計する。

- STEP1: オペリスク発生件数の設定 → (0, 1) の乱数を発生させ、頻度 (n) を決定する。
- STEP2: 損失金額の設定 → (0, 1) の乱数をn回発生させ、頻度分布の該当パーセンタイルの引っ張り損失金額とする。
- STEP3: 損失金額を合計する
- STEP1に戻る (1,000,000回程度実施する。)



シミュレーション結果の分布



乱数は (0,1) のため、これを確率と見なし、

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = p$$

となるxを決定する。

- バーゼル規制に応じて、金融機関は99.9%タイル伸す内が求められている。



ノンパラメトリックな計量化の方法 ー影響度として特定の分布を仮定しない方法ー

- ノンパラメトリックのアプローチ
- ブートストラップ
- カーネル密度関数による確率密度の推定
- MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション)

ノンパラメトリックのアプローチ

- 影響度分布を考えたとき、特定の分布を仮定することに無理があるケースに遭遇する。
 1. 多峰系の分布で、複数の分布が混じりあっていると思われるケース
 2. 不自然な尖りや歪みを持っているケース
 3. データが少なく形状そのものを特定できない、あるいはデータが十分に有り、分布を仮定する必要がないと思われるケース
- このような場合に、あえて特定の分布を仮定せず、損失データをそのまま利用することがある。これをノンパラメトリックアプローチと呼んでいる。
- ただし、以下のような手法を知っておくと、ノンパラメトリックアプローチをより有効にすることができる。

データの基づいて
母集団特性値の推定量の変動を調べ、
推定量の信頼区間等を推計する



ブートストラップ

カーネル関数 $K(\cdot)$ を重み関数として用いて、
データのスムージングを行う



カーネル密度関数による確率密度推定

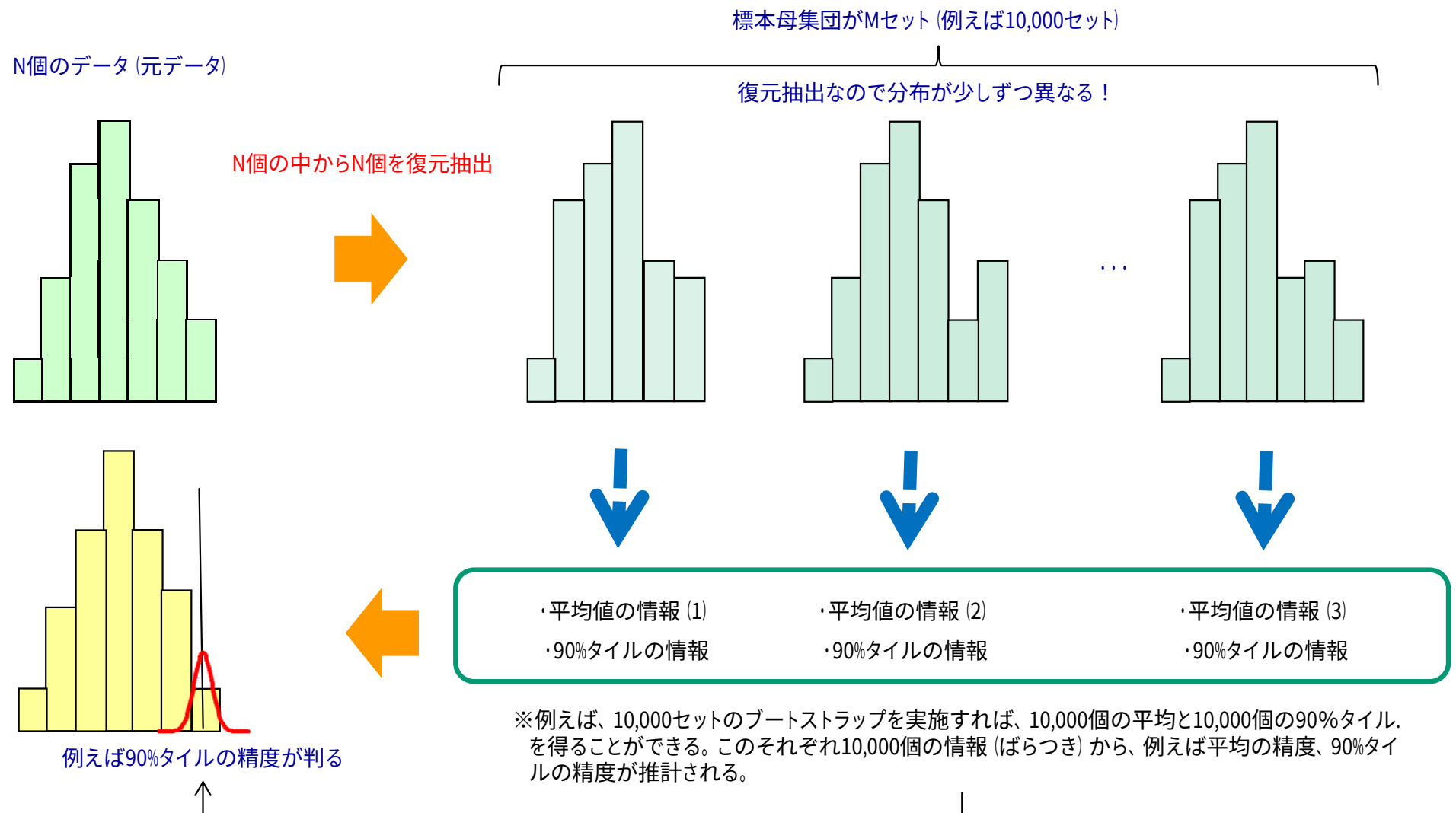
影響度分布を複数の分布の混合分布と仮定し
混合分布の各パラメータを推計する



マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC)

ブートストラップによる母集団特性値の変動の推計

- ブートストラップとは、元データ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ からの復元抽出によって得られる標本 (=ブートストラップ標本) に基づいて推定量の変動制に関する情報を得ようというもの。

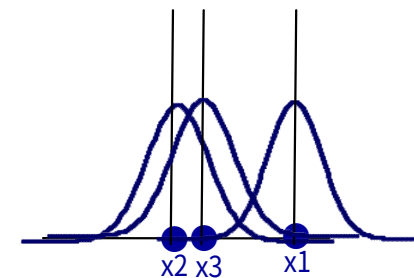
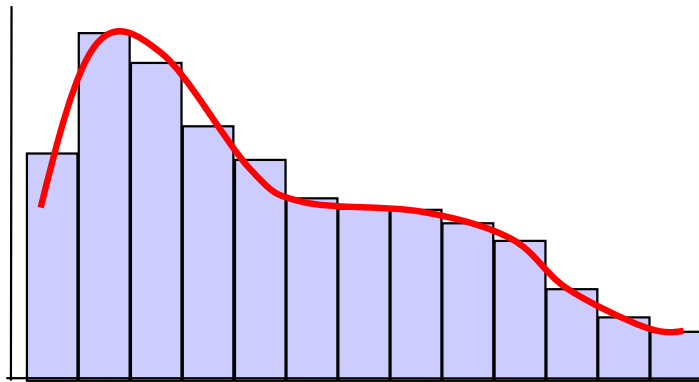


カーネル密度関数による確率密度の推定

- 下図にあるような凸凹な実データの分布をスムージングしたい場合、カーネル関数 $K(x)$ を重み関数として、スムージングする方法が利用されている。

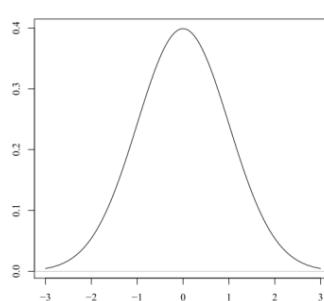
$$f(x) = \frac{1}{nh_x} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h_x}\right)$$

- $K(x)$ は原点を中心とする対象な関数で、分散が1に規格化されている。したがって、任意の x を中心として $x_1 \sim x_n$ のすべての点までの距離を h で基準化し、その距離の近さに応じて重みを付けて集計する方法である。

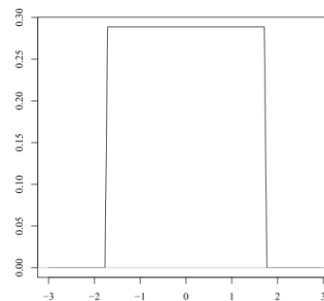


- ひとつひとつの点（データ）を分布の代表点と考えて、分布が重なりあったものとみなしてこれらを合成する方法。
- その際、分布はカーネル関数にて行われる。

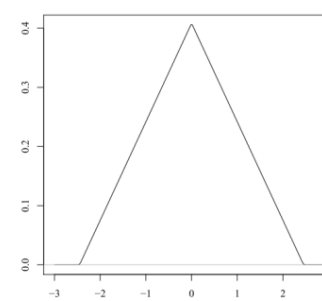
代表的なカーネル関数



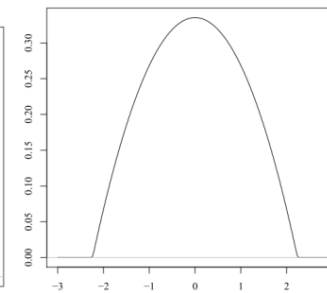
gaussian



rectangular



triangular



epanechnikov

マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション (MCMC)

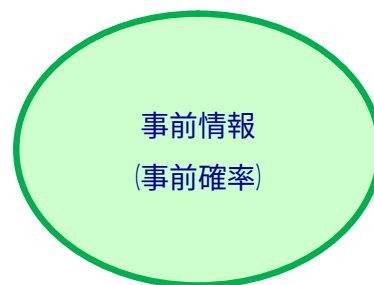
マルコフ連鎖
モンテカルロシミュレーション
(MCMC)



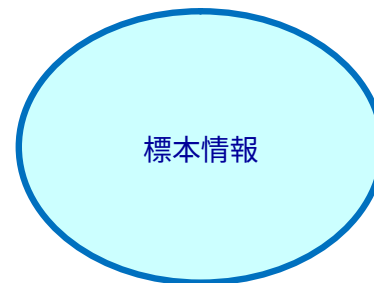
ベイズ統計学を用いた推論を行うために、シミュレーションを用いて
関心のあるパラメータについての情報を引き出す方法

マルコフ連鎖が正則条件のもとで、反復することによって確率標本の分布が不変分布 $\pi(x)$ に収束する性質を用いて、不変分布としての事後分布から確率分布を得るのがMCMCである。

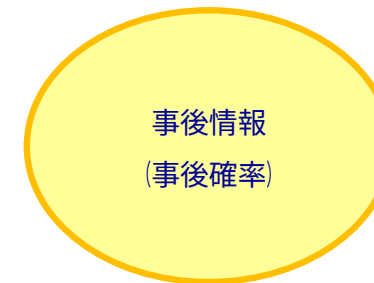
ベイズ推論



+



標本情報を受けた上での条件付き確率



通常雨は20%の確率で降る

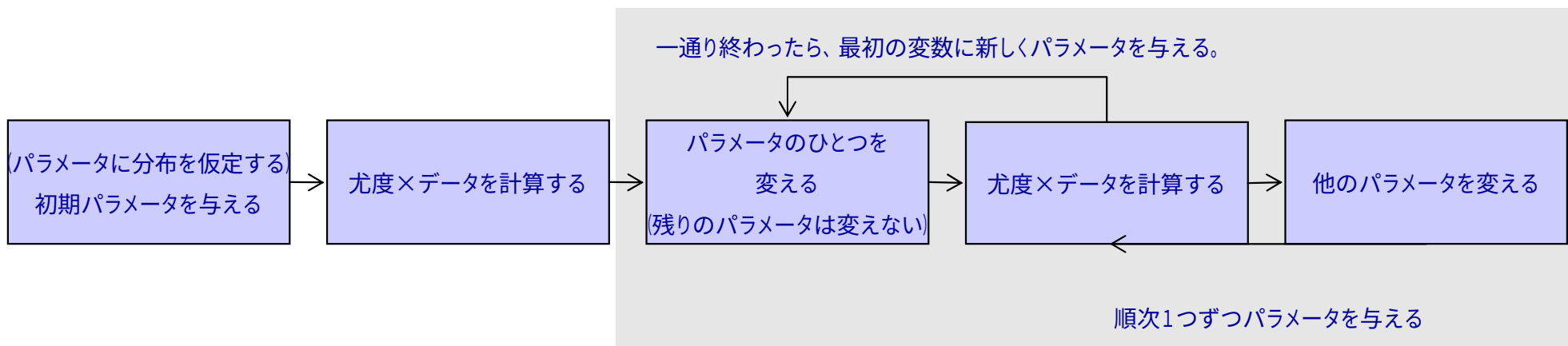
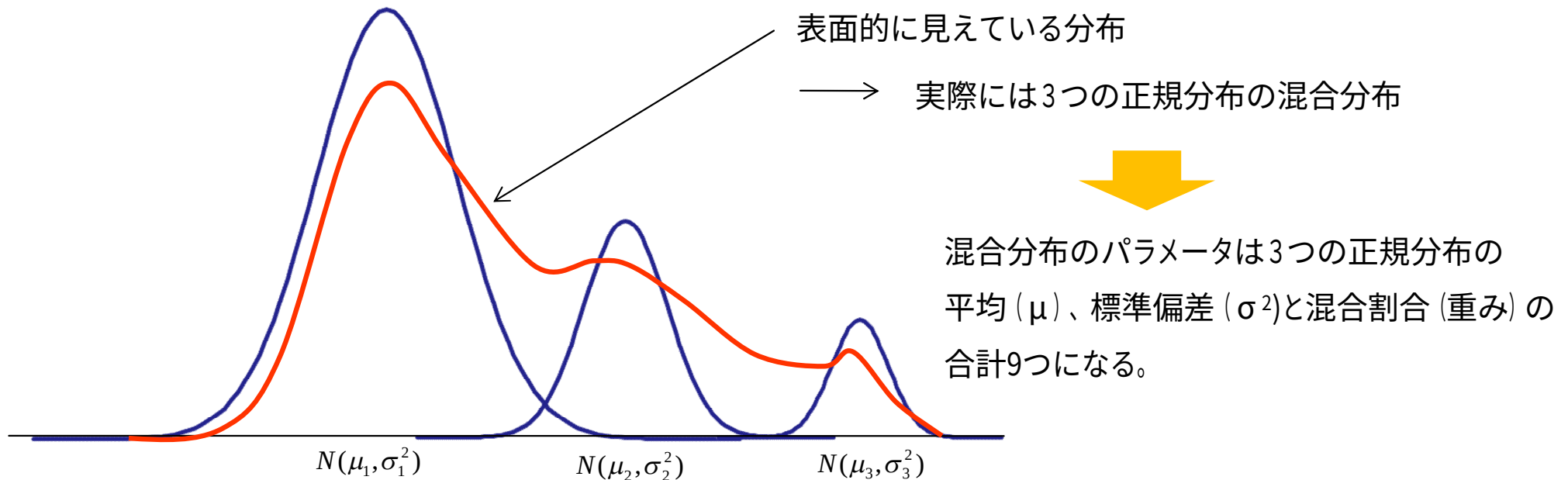
明日の天気予報は雨

明日の天気予報は雨という情報を受けた上での
雨の降る確率

ベイズの定理

$$\Pr(A_i | B) = \frac{\Pr(B | A_i) \Pr(A_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(B | A_j) \Pr(A_j)}$$

マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション (MCMC)



→ 尤度×データの分布で母数を推計する

[サンプル例] ノンパラメトリックな方法

- 擬似的に影響度分布として正規分布の混合分布を想定し、データを1万個用意してダミーの内部損失データを構築した。

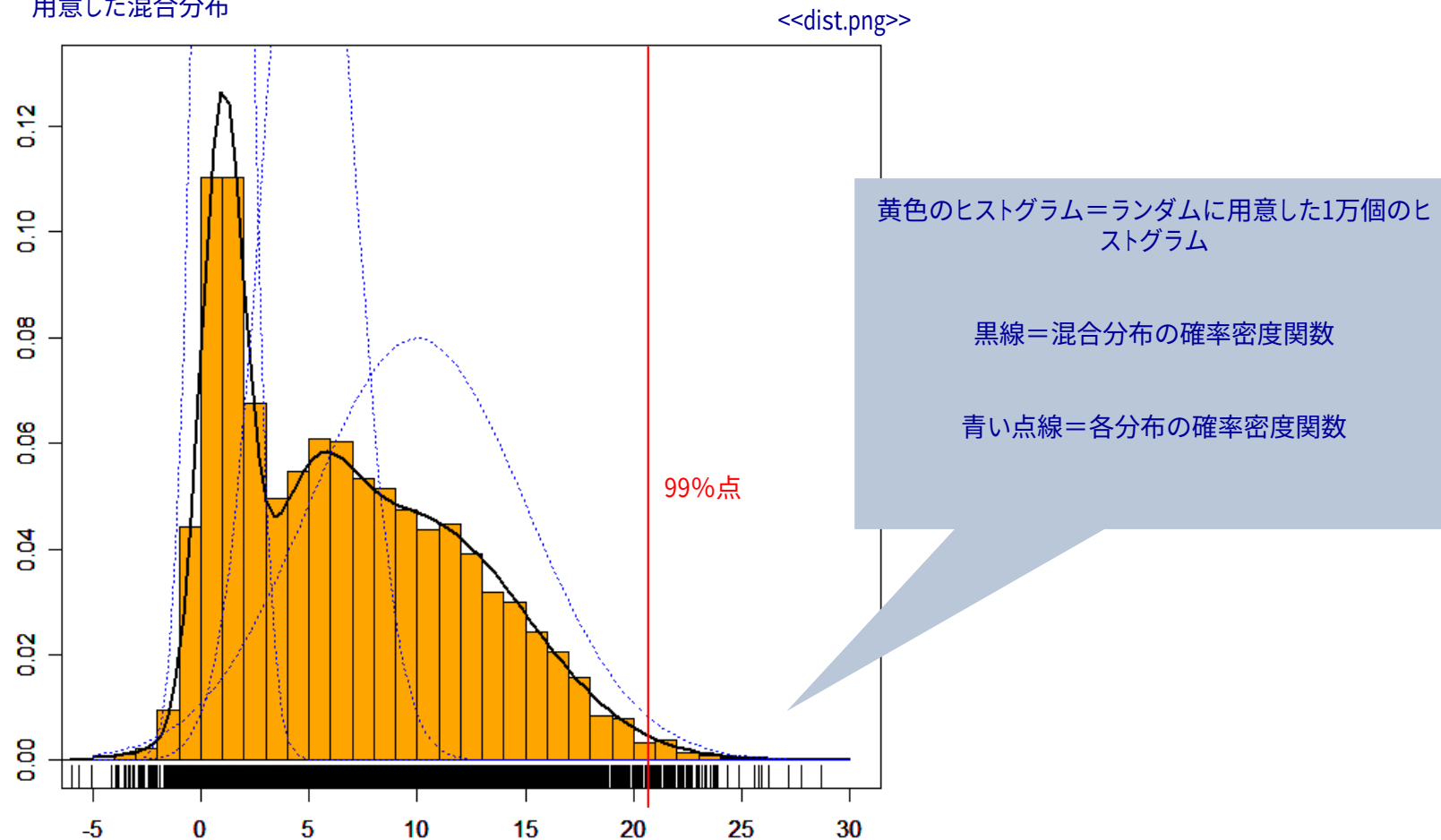
分布パラメーター

	正規分布1	正規分布2	正規分布3
平均	1.0	5.0	10.0
標準偏差	1.0	2.0	5.0
重み	29%	14%	57%

99%点の値

データ	99% tile
1万個	20.18
理論値	20.54

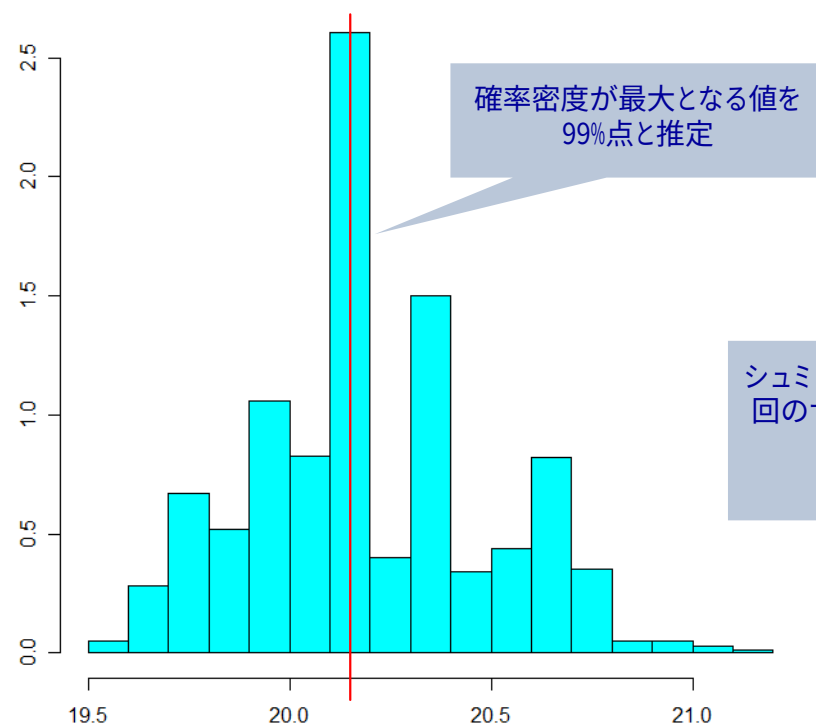
用意した混合分布



[サンプル例] ノンパラメトリックな方法 ブートストラップ

- 擬似的に作成した損失データから、重複を許したサンプリングを複数回行い、それぞれの99%点から全体の99%点を推定してみる。

サンプリング数=8000個, サンプリング回数=1000回での99%点の経験分布



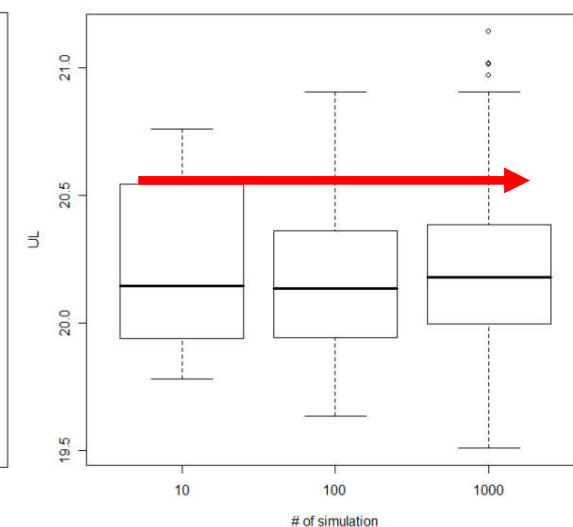
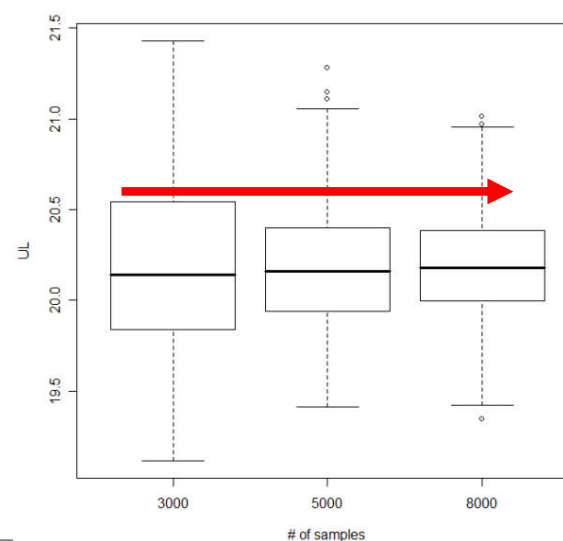
99%点の値

	99% tile
理論値	20.54
1万個	20.18
ブートストラップ推定	20.15

そもそも用意した1万個の99%点と比べて、大きくずれることはない

シミュレーション回数=1000回に固定した場合、1回のサンプリング数が多いほど、99%点推定値のブレは小さくなる

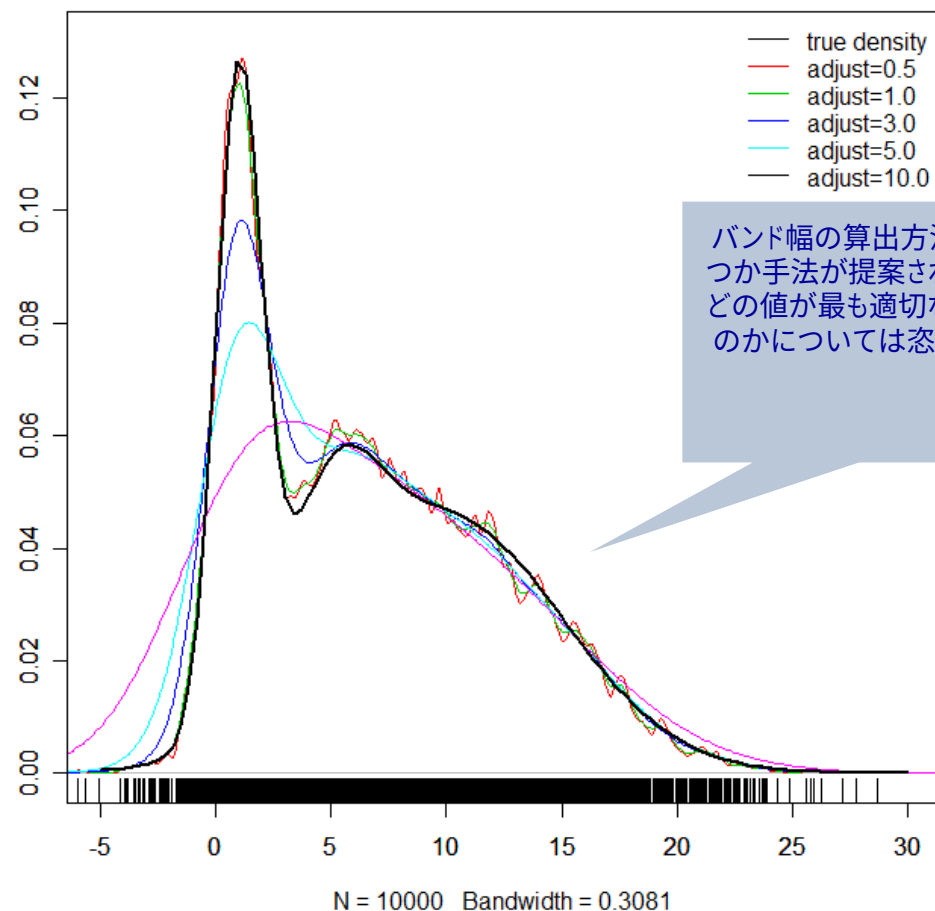
1回のサンプリング数=1000個で固定した場合、サンプリング回数が多いほど、99%点の偏りが小さい(均等に分布する)



オペレーショナル・リスクの計量化

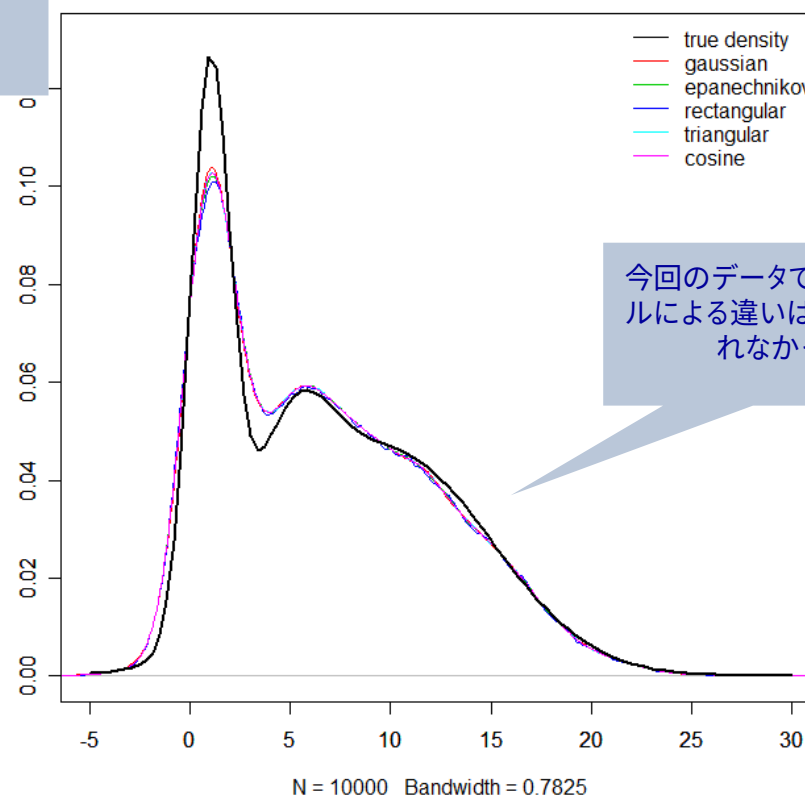
[サンプル例] ノンパラメトリックな方法 カーネル密度関数

- ガウシアン (正規分布) カーネルを用いて、損失データの密度関数を推計し、これに基づいて99%点を推定した結果は以下の通り



99%点の値

	99% tile
理論値	20.54
1万個	20.18
ブートストラップ推定	20.15
カーネル密度推定	20.19



[サンプル例] ノンパラメトリックな方法 MCMC

- マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた、複合分布の母数パラメータ (平均、標準偏差、重み) を推計し、これに基づき99%点を推定した結果は以下の通り

分布パラメーター

	正規分布1	正規分布2	正規分布3
平均	1.0	5.0	10.0
標準偏差	1.0	2.0	5.0
重み	2	1	4

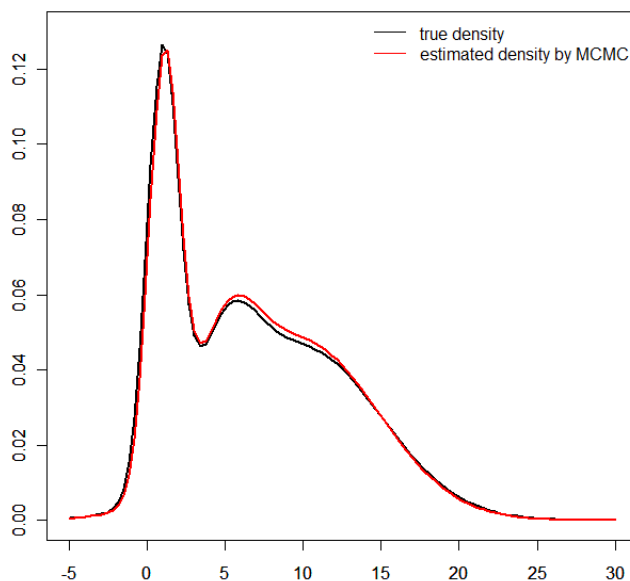
繰り返し回数=2000回での推定結果

	正規分布1	正規分布2	正規分布3
平均	1.09	5.00	9.90
標準偏差	0.97	2.00	4.91
重み	27.4%	14.2%	58.4%

99%点の値

	99% tile
理論値	20.54
1万個	20.18
ブートストラップ推定	20.15
カーネル密度推定	20.19
MCMC (一部のみ)	20.29

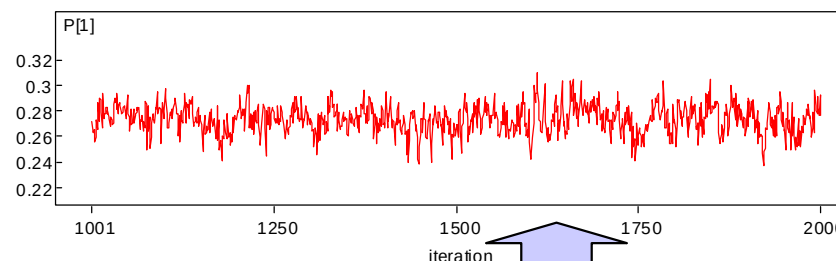
理論値とMCMCで推定した確率密度



今次推計では、全部のパラメーターの同時推定は困難だったため、分布2については事前に与えることにした

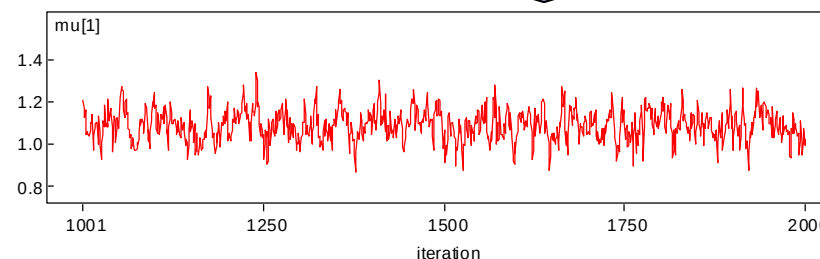
MCMCを用いる際は、分布間の背後の構造を仮定する必要がある

重み推定値の推移

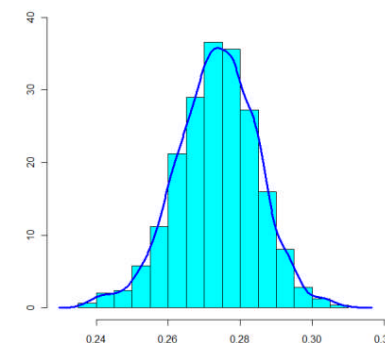


シミュレーション回数と推計した母数のぶれ

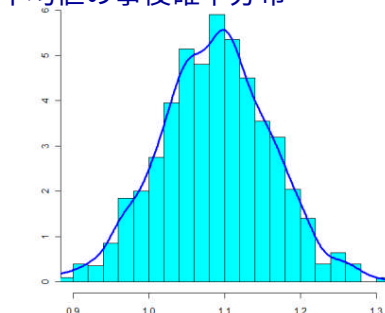
平均値推定値の推移

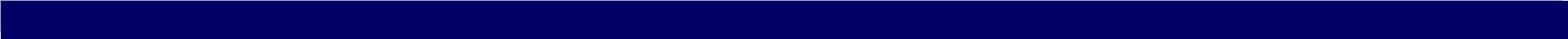


重みの事後確率分布



平均値の事後確率分布

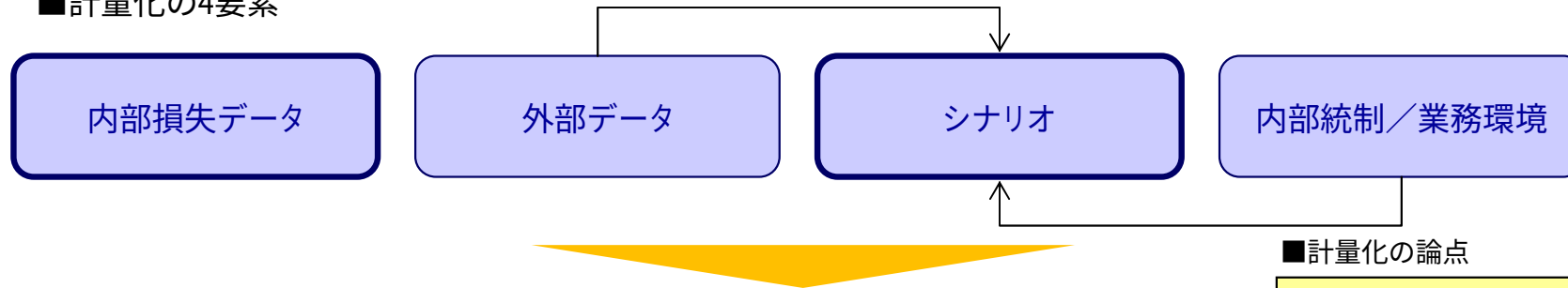




まとめ

計量化方法のまとめ

■計量化の4要素



■シミュレーション

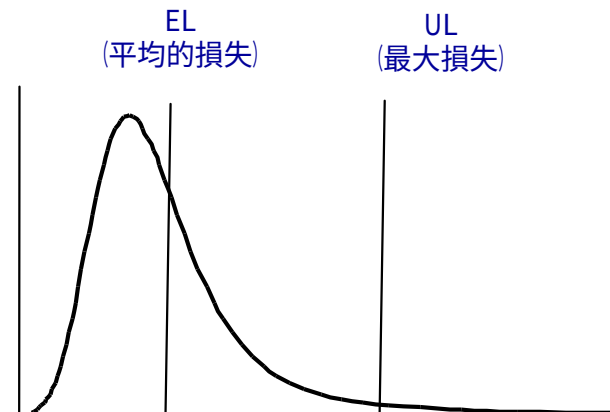
発生頻度と影響度の組合せにより、損失がどうなるか（どういう分布になるか）をシミュレート

発生頻度

- ポアソン分布
- 負の二項分布

影響度

- パラメトリック・アプローチ（特定の分布を仮定）
対数正規分布／ガンマ分布／ワイブル分布…
- ノンパラメトリック・アプローチ（分布を仮定しない）



■計量化の論点

- 1) 影響度にどんな分布を想定するか／しないか
- 2) 分布のパラメータをどう推定するか
- 3) 分布の当てはまりをどう評価するか
- 4) 分布を想定しない場合のテールの評価と精度
- 5) 計測単位と合成の方法

- 1) 収集されたデータの量と分布形状から判断
- 2) 最尤法等、分布のボディとテールのどちらに関心があるのか
- 3) X²検定等、テールに関心があればテールを切り出して判断
- 4) 精度評価、セミパラメトリックアプローチなど
- 5) 何のための計量化か、相関を校了する必要性

(参考) 影響度分布のモデル比較

	長所	短所
①ノンパラメトリックモデル	現実の値を利用するので、ボストン連銀の結果を見ても資本や粗利益との関係性で見てBIS規制と整合的 パラメトリックモデルの適切さを確認する際の基準になる。	現実の値の損失以上の金額が算出されることはない。 (テールの捕捉はそのままではできないと考えられている。)
②一般化パラメトリックモデル (g-h分布)	パラメータを4つ(4つで当てはまりが悪い場合は7つ)用いている分、分布の柔軟性が高い。 ボストン連銀の結果では、あらゆる企業、ビジネスライン、イベントラインにつき、整合的な値を得ている唯一つのパラメトリック分布(ただしノンパラもほぼ同様の結果)	パラメータ数多い。(推計にはn数が必要、300以上) マイナスの値が得られることがある。 Gおよびhのパラメータの組み合わせによっては劣加法性から優加法性に変化する。 Gおよびhの2パラメータに敏感
③古典的パラメトリックモデル	ワイブル分布、ガンマ分布、対数正規分布等があるが、これらは古くから知られており、またパラメータも少ないため、当てはめにあたっての恣意性が小さい。 三菱信託銀行の報告によれば、これらの分布のパラメータをモーメント法により推計すれば99.9%値で比較的近い値を得る。また日本銀行の報告でもモーメント法により推計すればノンパラメトリック手法により得られるデータと比較的近い値を得る。	ボストン連銀、日銀、三菱信託いずれもパラメータを尤度により設定した場合の実測値等との整合性が低い。 モーメント法により推定した場合は、実データ等との整合性は高いものの、分布形状については、確率分布の高いところでの当てはまり状況がよくない。
④EVT(POT)モデル	閾値を設け、それ未満はノンパラメトリック又は古典的なパラメトリック分布、それ以上はGPD分布を用いる。理論的には極値においてはGPD(一般化パレート分布)に従うとされている。 既往の複数の論文では、当てはまりが良いとされているものも比較ある。	閾値の設定が恣意的になりやすく、閾値の設定によって推計結果が大きく異なる。 裾が太い分、シミュレーションによっては巨大な額が出る可能性が他の分布より高い。特に最尤法や最小二乗法でパラメータを推定した場合は、損失額が巨大になりやすい。
⑤閾値を設けた古典的パラメトリック分布	閾値未満はノンパラメトリック分布とし、閾値以上は対数正規分布等のパラメトリック分布とする。日銀の報告によれば、対数正規分布やワイブル分布を仮定した場合、良好な結果が得られている。 現実の一つの分布で全体を良好にあてはめるのは難しい。(三菱信託銀行の結果やNorthern Trustの報告) この研究の発展系として混合分布を仮定する方法も考えられる。	閾値の設定が恣意的になりやすい。 EVT-POTのような理論的な裏づけがない。またそのため、どのようなパラメトリック分布を裾の部分でとるかは計算結果に依存する。

参考文献

1. 三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会「オペレーショナル・リスクのすべて」東洋経済新報社 2002年
2. 竹内啓「確率分布と統計解析」日本規格協会 1975年
3. 小西貞則、越智義道、大森裕浩「計算統計学の方法」朝倉書店 2008年
4. 室町幸雄「信用リスク計測とCDOの価格付け」朝倉書店 2007年
5. Kabir Dutta and Jason Perry “A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital” Federal Reserve Bank of Boston Working Paper [2007]
6. De Fontnouvelle et al “Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques” NBER Working Paper No. W111003 [2004]
7. Chapelle et al. “Basel II and Operational Risk: Implications for risk measurement and management in the financial sector,” National Bank of Belgium, [2004]
8. Moscadelli , M,. “ The modeling of operational risk : experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee ,”Bank of Italy [2004]
9. 日本銀行金融機構局「損失額分布やパラメータ推定手法の選択が、オペレーショナルリスク計量結果に与える影響について」 リスク管理と金融機関経営に関する調査論文 [2007年]

金融ソリューション本部

〒100-8141 東京都千代田区大手町2丁目3番6号
(三菱総合研究所ビルヂング)

担当者 所属：金融ソリューション本部

氏名：^{あくつ} 坏 雅博
河内 善弘
河田 雄次

TEL 03-3277-3468

FAX 03-3277-3466

※本資料は発表者個人の見解であり、発表者が所属する機関の見解ではありません。